تم تحميل وعرض المادة من منصة

حقيبتي
www.haqibati.net

منصة حقيبتي التعليمية

منصة حقيبتي هو موقع تعليمي يعمل على تسهيل العملية التعليمية بطريقة بسيطة وسهلة وتوفير كل ما يحتاجه المعلم والطالب لكافة الصفوف الدراسية كما يحتوي الموقع على حلول جميع المواد مع الشروح المتنوعة للمعلمين.

GET IT ON Google Play

Download on the App Store

حمل التطبيق من هنا

ملخص

الرياضيات

ثاني متوسط

الفصل الدراسي الأول

١٤٤٨



رياضيات ثاني متوسط

الفصل الدراسي الأول • أفهم وأطبق وأتحقق

ملخص دروس الكتاب

الرياضيات

ثاني متوسط

الفصل الدراسي الأول



قواعد مختصرة | أمثلة واضحة | تدريب ومراجعة

١ الجبر: الأعداد النسبية

٢ الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٣ التناسب والتشابه

٤ النسبة المئوية

٥ الهندسة والاستدلال المكاني

١ أقرأ القاعدة، وألاحظ سبب كل خطوة، ثم أحل التدريب قبل قراءة إجابة التحقق. أراجع الإشارة والوحدة ومعقولية الناتج.

فهرس الملخص

الفصلان الأول والثاني

الفصل الأول: الجبر: الأعداد النسبية

١	الأعداد النسبية	٦-٨
٢	مقارنة الأعداد النسبية وترتيبها	٩-١٢
٣	ضرب الأعداد النسبية	١٣-١٤
٤	قسمة الأعداد النسبية	١٥-١٦
٥	جمع الأعداد النسبية ذات المقامات المتشابهة وطرحها	١٧-١٨
٦	جمع الأعداد النسبية ذات المقامات المختلفة وطرحها	١٩-٢٠
٧	استراتيجية حل المسألة: البحث عن نمط	٢١
٨	القوى والأسس	٢٢-٢٣
٩	الصيغة العلمية	٢٤-٢٥
مراجعة	مراجعة الفصل الأول	٢٦-٢٧

الفصل الثاني: الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

١	الجذور التربيعية	٢٩-٣٠
٢	تقدير الجذور التربيعية	٣١-٣٢
٣	استراتيجية حل المسألة: استعمال أشكال فن	٣٣
٤	الأعداد الحقيقية	٣٤-٣٦
نشاط	أكتشف نظرية فيثاغورس	٣٧
٥	نظرية فيثاغورس	٣٨-٣٩
٦	تطبيقات على نظرية فيثاغورس	٤٠-٤١
نشاط	أمثل عدداً غير نسبي بدقة	٤٢
٧	هندسة: الأبعاد في المستوى الإحداثي	٤٣-٤٥
مراجعة	مراجعة الفصل الثاني	٤٦-٤٧

أرقام الفهرس لصفحات الملخص. مرجع صفحات الكتاب أسفل كل صفحة.

فهرس الملخص

الفصلان الثالث والرابع

الفصل الثالث: التناسب والتشابه

١	العلاقات المتناسبة وغير المتناسبة	٤٩–٥٠
٢	معدل التغير	٥١–٥٢
٣	المعدل الثابت للتغير	٥٣–٥٤
٤	حل التناسب	٥٥–٥٦
٥	استراتيجية حل المسألة: الرسم	٥٧
٦	تشابه المضلعات	٥٨–٥٩
٧	التكبير والتصغير	٦٠–٦١
نشاط	التكبير والتصغير بالجداول	٦٢
٨	القياس غير المباشر	٦٣–٦٤
مراجعة	مراجعة الفصل الثالث	٦٥–٦٦

الفصل الرابع: النسبة المئوية

١	إيجاد النسب المئوية ذهنياً	٦٨–٦٩
٢	النسبة المئوية والتقدير	٧٠–٧١
٣	استراتيجية حل المسألة: التحقق من معقولية الإجابة	٧٢
٤	الجبر: المعادلة المئوية	٧٣–٧٥
٥	التغير المئوي	٧٦–٧٨
مراجعة	مراجعة الفصل الرابع	٧٩–٨٠

العناوين قابلة للضغط للانتقال إلى الدرس.

فهرس الملخص

الفصل الخامس وطريقة المذاكرة

الفصل الخامس: الهندسة والاستدلال المكاني

١	علاقات الزوايا والمستقيمات	٨٢-٨٤
نشاط	توسع: المثلثات	٨٥
٢	استراتيجية حل المسألة: التبرير المنطقي	٨٦
٣	المضلعات والزوايا	٨٧-٨٨
٤	تطابق المضلعات	٨٩-٩٠
نشاط	توسع: استقصاء تطابق المثلثات	٩١
٥	التماثل	٩٢-٩٣
٦	الانعكاس	٩٤-٩٥
٧	الانسحاب	٩٦-٩٧
٨	الدوران	٩٨-١٠٠
مراجعة	مراجعة الفصل الخامس	١٠١-١٠٢
ختام	مراجعة شاملة	١٠٣

كيف أستفيد من الملخص؟

أحدد المطلوب والمعطيات، وأختار القاعدة المناسبة، وأكتب الخطوات بترتيب واضح.

إذا اختلفت إجابتي، أرجع إلى أول خطوة اختلفت فيها، ثم أعيد المحاولة.

أستعمل الرسم أو التقدير أو التعويض للتحقق متى أمكن.

الفصل الأول

شرح مختصر • أمثلة بخطوات • تدريب ومراجعة

الفصل الأول

الجبر: الأعداد النسبية

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨} = ٠.٧٥$$



ماذا سأتعلم؟

- أحوّل الأعداد النسبية بين الصور الكسرية والعشرية.
- أقارن الأعداد النسبية، وأجري العمليات عليها.
- أفهم القوى والأسس، وأكتب الأعداد بالصيغة العلمية.

أقرأ القاعدة، وأتبع المثال، ثم أحل التدريب وأتحقق من الحساب والإشارة والوحدة.

الجبر: الأعداد النسبية

١ الأعداد النسبية

الفصل الأول: الجبر • من الكسر الاعتيادي إلى الكسر العشري

العدد النسبي عدد يمكن كتابته في صورة $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$، حيث أ وب عددان صحيحان، **وب لا يساوي صفراً**.

عدد صحيح	الصفر عدد نسبي	عدد كسري
$-٧ = -\frac{٧}{١}$	$٠ = \frac{٠}{١}$	$٢\frac{٢}{٣} = \frac{٨}{٣}$

مثال: أكتب خمسة أثمان كسراً عشرياً

أقسم البسط على المقام. وفي هذا المثال تنتهي القسمة:

$$\frac{٥}{٨} = ٥ \div ٨ = ٠.٦٢٥$$

$\frac{٥}{٨}$



يمثل الشريط خمسة أجزاء مظللة من ثمانية أجزاء متساوية.

كسر عشري منته

يتوقف بعد عدد محدد من المنازل العشرية.

٠.٦٢٥

انتهت القسمة وأصبح الباقي صفراً.

كسر عشري دوري

يتكرر فيه رقم أو مجموعة أرقام دون نهاية.

$$\frac{١}{٣} = ٠.\overline{٣}$$

الشرطة فوق الجزء المتكرر فقط.

إذا كان العدد الكسري سالباً

أحسب البسط: $١ \times ٣ + ٢ = ٥$، ويبقى المقام ٣. ثم أقسم وأحتفظ بإشارة السالب:

$$-١\frac{٢}{٣} = -\frac{٥}{٣} = -١.\overline{٦}$$

في العدد الكسري السالب، تشمل إشارة السالب العدد كله. وكلا الكسرين العشريين المنتهي والدوري يمثل عدداً نسبياً.

الجبر: الأعداد النسبية

١ الأعداد النسبية

أحدد أولاً: هل الكسر العشري **منتهٍ** أم **دوري**؟ ثم أتبع الطريقة المناسبة.

١ • إذا كان الكسر العشري منتهياً

أكتب ← $٠.٤٥ = \frac{٤٥}{١٠٠}$ ؛ لأن آخر منزلة هي جزء من مئة.

أبسط ← $\frac{٤٥}{١٠٠} = \frac{٩}{٢٠}$ ؛ بقسمة البسط والمقام على ٥.

أتحقق ← ٩ ÷ ٢٠ = ٠.٤٥ ؛ عاد العدد نفسه.

وإذا كان العدد سالباً، تبقى إشارة السالب:

$$-٠.١٤ = -\frac{١٤}{١٠٠} = -\frac{٧}{٥٠}$$

٢ • إذا كان الكسر العشري دورياً

مثال: أكتب $٠.\overline{٥}$ كسراً اعتيادياً. أرمز له بالمتغير س:

أرمز ← $س = ٠.\overline{٥}$

أضرب ← $١٠ \times س = ٥.\overline{٥}$ ؛ منزلة واحدة متكررة.

أطرح ← $١٠ \times س - س = ٥$ ؛ اختفى الجزء الدوري.

أقسم ← $٩ \times س = ٥$، إذن $س = \frac{٥}{٩}$.

إذا تكرر رقمان

في $٠.\overline{٢٧}$ نضرب في ١٠٠ بدلاً من ١٠، ثم نطرح العدد الأصلي:

$$٠.\overline{٢٧} = \frac{٢٧}{٩٩} = \frac{٣}{١١}$$

أميز الجزء المتكرر: $٠.٣\overline{٤}$ تعني ٠.٣٤٤٤٤...؛ الشرطة فوق ٤ وحده، لأن ٣ لا يتكرر.

الجبر: الأعداد النسبية

١ الأعداد النسبية

أستعمل علامة ≈ عند التقريب. وأستعمل علامة = عندما تكون القيمتان متساويتين تماماً.

مثال من الكتاب: نسبة الأهداف المسجلة

سجل خالد ٦ أهداف من ٢٢ تصويبة. أكتب نسبة الأهداف إلى التصويبات كسراً عشرياً:

$$\frac{٦}{٢٢} = ٠.\overline{٢٧}$$

للتقريب إلى أقرب جزء من ألف، أحتفظ بثلاث منازل: ٠.٢٧٢، وأنظر إلى المنزلة التالية وهي ٧. أزيد رقم الأجزاء من ألف من ٢ إلى ٣:

$$\frac{٦}{٢٢} \approx ٠.٢٧٣$$

أتدرب بنفسي

١ أكتب $\frac{٤}{٥}$ كسراً عشرياً.

٢ أكتب -٠.٤ كسراً اعتيادياً في أبسط صورة.

٣ أكتب $٠.\overline{٢}$ كسراً اعتيادياً في أبسط صورة.

٤ فاز حمد في ٦ سباقات من ٣٦. أكتب نسبة فوزه كسراً عشرياً مقرباً إلى أقرب جزء من ألف.

أتحقق من إجابتي

١) $\frac{٤}{٥} = ٠.٨$.

٢) $-٠.٤ = -\frac{٢}{٥}$.

٣) $٠.\overline{٢} = \frac{٢}{٩}$.

٤) $\frac{٦}{٣٦} \approx ٠.١٦٧$

أقسم البسط على المقام، وأبسط الكسر الاعتيادي، وأقرب في الخطوة الأخيرة حسب المنزلة المطلوبة.

الجبر: الأعداد النسبية

٢ مقارنة الأعداد النسبية وترتيبها

عند توحيد المقامات تصبح الأجزاء متساوية الحجم، فأقارن بين البسطين. أضرب البسط والمقام في **العدد نفسه** حتى تبقى قيمة الكسر ثابتة.

متكافئات شائعة تساعدني

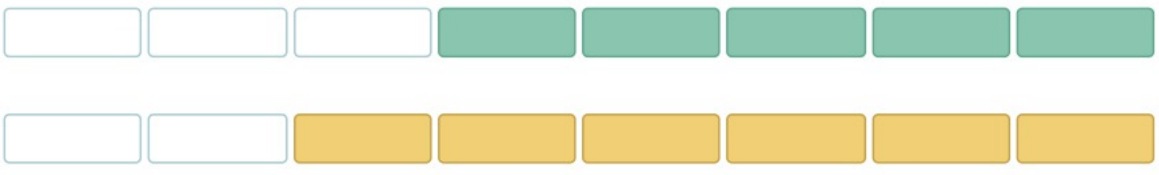
النصف والثلث	الربع والخمس	الثمن والعشر
$\frac{١}{٢} = ٠.٥$	$\frac{١}{٤} = ٠.٢٥$	$\frac{١}{٨} = ٠.١٢٥$
$\frac{١}{٣} = ٠.\overline{٣}$	$\frac{١}{٥} = ٠.٢$	$\frac{١}{١٠} = ٠.١$

مثال: أقارن خمسة أثمان بثلاثة أرباع

أوحد ← المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ٨ و٤ هو ٨. إذن $\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$.

أقارن ← لأن ٥ أصغر من ٦، فإن $\frac{٥}{٨} < \frac{٦}{٨}$.

أستنتج ← $\frac{٥}{٨} < \frac{٣}{٤}$



$\frac{٥}{٨}$

$\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$

فتحة علامة المقارنة تتجه نحو العدد الأكبر. أقرأ المقارنة بالكلمات لأتأكد من معناها.

الجبر: الأعداد النسبية

٢ مقارنة الأعداد النسبية وترتيبها

يمكنني تحويل الكسور إلى كسور عشرية. أقارن المنازل من اليسار إلى اليمين، بدءاً بالجزء الصحيح ثم الأعشار ثم أجزاء المئة، وهكذا.

مثال: أقارن ثمانية أتساع بالعدد ٠.٨

$$٠.\overline{٨} = \frac{٨}{٩}$$

٠.٨٠٠٠٠...	٠.٨٨٨٨٨...
العدد ٠.٨	ثمانية أتساع

الأعشار متساوية، لكن في أجزاء المئة: ٨ أكبر من ٠. إذن:

$$٠.٨ < \frac{٨}{٩}$$

مثال: أرتب قياسات شاشات تصاعدياً

أحول الأجزاء الكسرية إلى كسور عشرية، ثم أرتب القياسات بالبوصة من الأصغر إلى الأكبر:

الترتيب	القياس الأصلي	صورته العشرية
١ • الأصغر	٣٨.٣	٣٨.٣
٢	٣٨.٤	٣٨.٤
٣	$٣٨\frac{٩}{١٦}$	٣٨.٥٦٢٥
٤ • الأكبر	$٣٨\frac{٢}{٣}$	$٣٨.\overline{٦}$

أنتبه: الدوري يختلف عن المنتهي

$$٠.٢٨ < ٠.\overline{٢٨}$$

لأن ٠.٢٨٠٠٠... أصغر من ٠.٢٨٢٨٢...؛ فالاختلاف يبدأ في المنزلة الثالثة بعد الفاصلة.

لا أقرب الأعداد قبل المقارنة إذا كان ذلك يخفي الفرق بينها. وإضافة أصفار إلى يمين الكسر العشري المنتهي لا تغير قيمته.

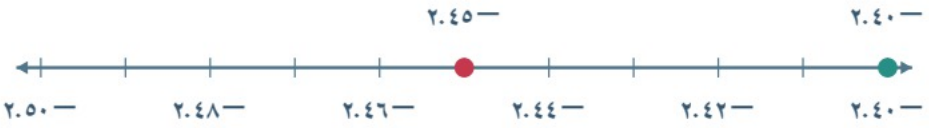
الجبر: الأعداد النسبية

٢ مقارنة الأعداد النسبية وترتيبها

على خط الأعداد، العدد الواقع إلى **اليمين أكبر**. وكل عدد موجب أكبر من الصفر، وكل عدد سالب أصغر من الصفر.

مثال: أقارن عددين عشريين سالبين

أكتب −٢.٤ في صورة −٢.٤٠ حتى تتساوى المنازل العشرية:



العدد −٢.٤ يقع إلى يمين −٢.٤٥، لذلك:

$$-٢.٤ > -٢.٤٥$$

مثال: أقارن كسرين سالبين

أحول إلى كسور عشرية: $-\frac{٧}{٨} = -٠.٨٧٥$، و $-\frac{٦}{٨} = -٠.٧٥$.

العدد الأقرب إلى الصفر أكبر عندما يكون العددان سالبين. إذن:

$$-\frac{٧}{٨} < -\frac{٦}{٨}$$

أرتب أعداداً سالبة من الأصغر إلى الأكبر

أحول العددين الكسريين إلى كسور عشرية، ثم أقارن:

الترتيب	العدد	لماذا؟
١ • الأصغر	−٢.٩٥	الأبعد عن الصفر بين هذه الأعداد.
٢	−٢.٩	يقع إلى يمين العدد السابق.
٣	$-٢\frac{١}{٢}$	يساوي −٢.٥.
٤ • الأكبر	$-٢\frac{١}{٤}$	يساوي −٢.٢٥، وهو الأقرب إلى الصفر.

لا أحكم على العدد السالب من أرقامه وحدها؛ أستعمل موقعه على خط الأعداد أو بعده عن الصفر.

٢ مقارنة الأعداد النسبية وترتيبها

أختار لكل سؤال طريقة مناسبة: توحيد المقامات أو التحويل إلى كسور عشرية. وعند وجود السالب أراجع موضع العدد على خط الأعداد.

أتدرب وأفسر

١ أقارن بين $\frac{٣}{١١}$ و٠.٢٥.

٢ أقارن بين $-\frac{٤}{٥}$ و $-\frac{٧}{١٠}$.

٣ أرتب تصاعديًا: $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٥}{١٦}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$.

٤ أرتب تصاعديًا: -٥.٢٥ ، $-٥\frac{١}{٣}$ ، $-٤\frac{٧}{٨}$ ، -٤.٦.

٥ قال طالب: $\frac{٥}{١٤}$ أكبر من $\frac{٥}{١١}$ لأن ١٤ أكبر من ١١. هل تصح مقارنته؟ أفسر.

أتحقق من إجابتي

١) $\frac{٣}{١١} = ٠.\overline{٢٧}$، لذلك $\frac{٣}{١١} < ٠.٢٥$.

٢) $-\frac{٤}{٥} = -٠.٨$ و $-\frac{٧}{١٠} = -٠.٧$، لذلك $-\frac{٤}{٥} < -\frac{٧}{١٠}$.

٣) $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٥}{١٦}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$.

٤) $-٥\frac{١}{٣}$ ، -٥.٢٥ ، $-٤\frac{٧}{٨}$ ، -٤.٦.

٥) لا؛ $\frac{٥}{١٤} < \frac{٥}{١١}$. عند ثبات البسط الموجب، يكون الكسر ذو المقام الأكبر أصغر؛ لأن الأجزاء أصغر.

أقرأ إجابتي بالكلمات، ثم أتحقق بطريقة ثانية إن أمكن. وفي المقارنة بين عددين سالبين، الأقرب إلى الصفر أكبر.

الجبر: الأعداد النسبية

٣ ضرب الأعداد النسبية

القاعدة أولاً، ثم المثال

لضرب كسرين: أضرب البسط في البسط والمقام في المقام، وأختصر العوامل المشتركة إن أمكن، ثم أحدد إشارة الناتج.

$$\frac{٨}{١٥} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٢}{٣}$$

الإشارتان متشابهتان

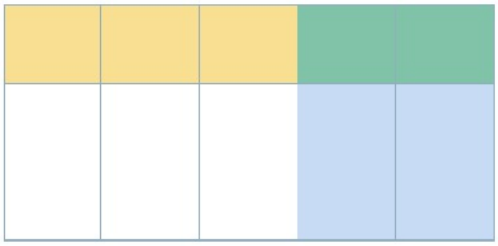
الناتج موجب: موجب × موجب، أو سالب × سالب.

الإشارتان مختلفتان

الناتج سالب: موجب × سالب، أو سالب × موجب.

أرى المعنى في النموذج

ثلث الخُمسين يعني $\frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{١٥}$.



التقاطع الأخضر جزآن من خمسة عشر جزءاً متساويًا.

↓

مثال: أختصر ثم أضرب

أختصر ٣ مع ٩ بالقسمة على ٣:

$$\frac{٤}{١٥} = \frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٩}$$

مثال بإشارة سالبة

أختصر ٣ مع ٦؛ وأحتفظ بالسالب لاختلاف الإشارتين:

$$\frac{٥}{١٦}- = \frac{١}{٨} \times \frac{٥}{٢}- = \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٦}-$$

أختصر عاملاً في بسط مع عامل في مقام. ولا أجمع البسطين أو المقامين عند الضرب.

الجبر: الأعداد النسبية

٣ ضرب الأعداد النسبية

الأعداد الكسرية ووحدات القياس

قبل ضرب الأعداد الكسرية، أحولها إلى كسور غير فعلية. لا أضرب العدد الصحيح وحده والكسر وحده.

مثال: ضرب عددين كسريين

أحول ← $٤\frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}$، و$٢\frac{٢}{٣} = \frac{٨}{٣}$.

أضرب ← $٤\frac{١}{٢} \times ٢\frac{٢}{٣} = \frac{٩}{٢} \times \frac{٨}{٣}$

أبسط ← $\frac{٩}{٢} \times \frac{٨}{٣} = ١٢$؛ بعد اختصار العوامل المشتركة.

↓

مثال حياتي: ثمن العنب

اشترى محمود ٢ $\frac{١}{٢}$ كجم من العنب، وسعر الكيلوجرام ٦ ريالات. ما الثمن؟

$$٢\frac{١}{٢} \times ٦ = ١٥$$

الثمن ١٥ ريالاً. وحدة الكيلوجرام تُختصر، فتبقى وحدة الريال.

أتدرب بنفسي

١ أوجد $-\frac{١}{٣} \times (-\frac{٣}{٥})$.

٢ أوجد $٥\frac{١}{٢} \times ١\frac{١}{٣}$.

أتحقق من إجابتي

١) $-\frac{١}{٣} \times (-\frac{٣}{٥}) = \frac{١}{٥}$

٢) $٥\frac{١}{٢} \times ١\frac{١}{٣} = \frac{٢٢}{٣} = ٧\frac{١}{٣}$

أبسط الناتج وأراجع الإشارة، ثم أقارنه بتقدير قريب.

٤ قسمة الأعداد النسبية

المقلوب ومعنى القسمة

مقلوب العدد، أو نظيره الضربي، عدد نضربه فيه فيكون الناتج ١. للصفر لا يوجد نظير ضربي.

كيف أجد المقلوب؟

أبدل موضع البسط والمقام، وأحتفظ بإشارة العدد:

$$\frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٣} = ١$$

$$-٥ = -\frac{٢}{٣} = -\frac{١٧}{٣}$$

مقلوب $-\frac{١٧}{٣}$ هو $-\frac{٣}{١٧}$.

↓

لقسمة كسرين

أُبقي الكسر الأول، وأغير القسمة إلى ضرب، وأقلب الكسر الثاني فقط:

أقلب ←

$$-\frac{٤}{٥} \div \frac{٦}{٧} = -\frac{٤}{٥} \times \frac{٧}{٦}$$

أبسط ←

$$-\frac{٤}{٥} \times \frac{٧}{٦} = -\frac{١٤}{١٥}$$

أتحقق ←

$$-\frac{٤}{٥} = -\frac{١٤}{١٥} \times \frac{٦}{٧}$$

خط الكسر يعني القسمة

$$\frac{٢}{٣} \div \frac{٣}{٤} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٣}{٤}} = \frac{٨}{٩}$$

! المقسوم عليه لا يساوي صفراً. وأقلب العدد الثاني بعد تحويل العدد الكسري إلى كسر غير فعلي.

٤ قسمة الأعداد النسبية

القسمة في المسائل

إذا عرفت الكمية الكلية والكمية اللازمة لكل جزء، أقسم لأجد عدد الأجزاء.

مثال: قسمة عددين كسريين

أحول ← $٤ = \frac{٢}{٣}$ ، و $-٣ = -\frac{١}{٢} = -\frac{٧}{٢}$.

أقلب ← $\frac{١٤}{٣} \div (-\frac{٧}{٢}) = \frac{١٤}{٣} \times (-\frac{٢}{٧})$

أبسط ← $\frac{١٤}{٣} \times (-\frac{٢}{٧}) = -\frac{٤}{٣} = -١\frac{١}{٣}$

↓

مثال: عدد الأعلام

لدينا ٢١ م^2 من القماش، ويحتاج العَلَم الواحد إلى $١\frac{١}{٦}$ م^2. كم عَلَمًا نصنع؟

$$٢١ \div ١\frac{١}{٦} = ٢١ \times \frac{٦}{٧} = ١٨$$

نصنع ١٨ عَلَمًا. أتحقق بضرب عدد الأعلام في قماش العَلَم الواحد.

أتدرب بنفسي

١ أوجد $-\frac{٢}{٣} \div (-\frac{٣}{٥})$.

٢ كم رقيقة بسمك $\frac{١}{٢}$ سم نصنع من ٣٦ سم من الخشب؟

أتحقق من إجابتي

١) $-\frac{٢}{٣} \div (-\frac{٣}{٥}) = \frac{١٠}{٩} = ١\frac{١}{٩}$

٢) $٣٦ \div ١\frac{١}{٢} = ٢٤$ رقيقة.

أتحقق من القسمة بالضرب: الناتج × المقسوم عليه = المقسوم.

الجبر: الأعداد النسبية

٥ جمع الأعداد النسبية ذات المقامات المتشابهة وطرحها

المقام يبقى كما هو

عند جمع أو طرح كسور ذات **مقامات متشابهة**، أجمع أو أطرح البسوط، وأكتب الناتج فوق المقام نفسه، ثم أبسط.

مثال: جمع بإشارتين مختلفتين

أطبق قاعدة جمع الأعداد الصحيحة على البسطين:

$$\frac{٥}{٨} + (\frac{٧}{٨}-) = \frac{٢}{٨}- = \frac{١}{٤}-$$

↓

مثال: طرح عدد موجب من عدد سالب

الطرح يعني إضافة المعكوس الجمعي:

$$\frac{٨}{٩}- - \frac{٧}{٩} = \frac{٨}{٩}- + (\frac{٧}{٩}-) = \frac{١٥}{٩}-$$

$$\frac{٥}{٣}- = \frac{٢}{٣}١- = \frac{١٥}{٩}-$$

مثال: طرح عدد سالب

$$\frac{٥}{٧} - (\frac{٤}{٧}-) = \frac{٥}{٧} + \frac{٤}{٧} = \frac{٩}{٧}$$

طرح السالب أصبح جمعًا، والناتج موجب.

أتدرب بنفسي

١ أوجد $\frac{٢}{٥} + (\frac{٤}{٥}-)$.

أتحقق من إجابتي

١) $\frac{٢}{٥} + (\frac{٤}{٥}-) = \frac{٢}{٥}-$

لا أجمع المقامات. فالمقام يصف حجم الجزء، وهو لم يتغير.

حقيبتي
www.haqibati.net
تم عمل الملخص من قبل موقع حقيبتي

الجبر: الأعداد النسبية

٥ جمع الأعداد النسبية ذات المقامات المتشابهة وطرحها

جمع الأعداد الكسرية وطرحها

أجمع الأعداد الصحيحة والكسور كلاً على حدة. وعند الطرح قد أحتاج إلى إعادة التجميع.

مثال: أعيد التجميع بعد الجمع

$$٥\frac{٧}{٩} + ٨\frac{٤}{٩} = ١٣\frac{١١}{٩}$$

$$١٣ + \frac{١١}{٩} = ١٤\frac{٢}{٩}$$

الكسر $\frac{١١}{٩}$ يساوي واحداً و $\frac{٢}{٩}$ ؛ فأضيف الواحد إلى الجزء الصحيح.

↓

مثال: أعيد التجميع قبل الطرح

أحسب $١٤\frac{١}{٤} - ١٢\frac{٣}{٤}$. أعيد كتابة العدد الأول:

$$١٤\frac{١}{٤} = ١٣ + \frac{٥}{٤}$$

الصحيح ← $١٣ - ١٢ = ١$

الكسر ← $\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

الناتج ← $١ + \frac{١}{٢} = ١\frac{١}{٢}$

أتدرب بنفسي

١ أوجد $٩ - ٦\frac{٣}{٧}$.

أتحقق من إجابتي

١) $٩ - ٦\frac{٣}{٧} = ٢\frac{٤}{٧}$

! في الطرح من عدد صحيح، أستبدل واحداً صحيحاً بعدد من الأجزاء يساوي مقام الكسر.

الجبر: الأعداد النسبية

٦ جمع الأعداد النسبية ذات المقامات المختلفة وطرحها

أوحد المقامات أولاً

إذا اختلف المقامان، أجد المضاعف المشترك الأصغر، وأكتب كسرين مكافئين، ثم أجمع أو أطرح البسطين.

مثال: ربع مضافًا إلى سالب ثلثين

أوحد ← المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ٤ و٣ هو ١٢.

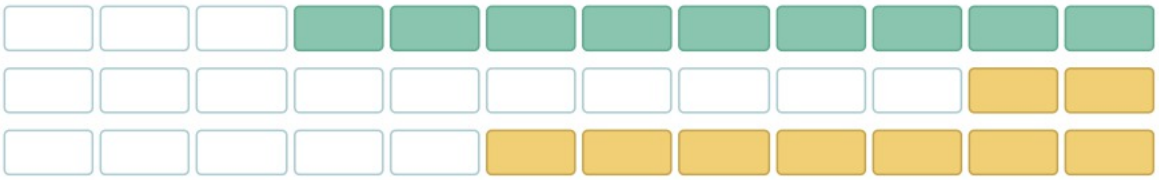
أكتب ← $\frac{١}{٤} = \frac{٣}{١٢}$، و $-\frac{٢}{٣} = -\frac{٨}{١٢}$.

أجمع ← $\frac{١}{٤} + (-\frac{٢}{٣}) = \frac{٣}{١٢} + (-\frac{٨}{١٢}) = -\frac{٥}{١٢}$

↓

مثال: أطرح سدسًا من ثلاثة أرباع

$$\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٦} = \frac{٩}{١٢} - \frac{٢}{١٢} = \frac{٧}{١٢}$$



أتدرب بنفسي

١ أوجد $\frac{٥}{٦} + (-\frac{٣}{٨})$.

٢ أوجد $\frac{٧}{٨} - \frac{٣}{٤}$.

أتحقق من إجابتي

١) $\frac{٥}{٦} + (-\frac{٣}{٨}) = \frac{٢٠}{٢٤} - \frac{٩}{٢٤} = \frac{١١}{٢٤}$

٢) $\frac{٧}{٨} - \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٨}$

! أغير البسط والمقام معًا عند كتابة كسر مكافئ، وأبسط الناتج بعد إتمام العملية.

الجبر: الأعداد النسبية

٦ جمع الأعداد النسبية ذات المقامات المختلفة وطرحها

الأعداد الكسرية والمسائل

إذا ظهر عدد كسري سالب، فإن تحويله إلى كسر غير فعلي يساعدني على ضبط الإشارة، ثم أوحد المقامات.

مثال: جمع عددين كسريين

أحول ← $-٦\frac{٢}{٩} + ٤\frac{٥}{٦} = -\frac{٥٦}{٩} + \frac{٢٩}{٦}$

أوحد ← $-\frac{٥٦}{٩} + \frac{٢٩}{٦} = -\frac{١١٢}{١٨} + \frac{٨٧}{١٨}$

أبسط ← $-\frac{١١٢}{١٨} + \frac{٨٧}{١٨} = -\frac{٢٥}{١٨} = -١\frac{٧}{١٨}$

مثال: وقت الأنشطة

لعبت الجوهرة ١ $\frac{١}{٤}$ ساعة، ودرست ٢ $\frac{١}{٤}$ ساعة، وأدت أعمالاً منزلية مدة نصف ساعة. ما الزمن الكلي؟

$$١\frac{١}{٤} + ٢\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} = ٤$$

قضت أربع ساعات في هذه الأنشطة.

أتدرب بنفسي

١ أوجد $\frac{٥}{٨} + \frac{١}{٢}$.

٢ قطع نايف ٢ $\frac{١}{٣}$ كلم، ثم ٣ $\frac{١}{٢}$ كلم، ثم $\frac{٣}{٤}$ كلم. ما المجموع؟

أتحقق من إجابتي

١) $\frac{٥}{٨} + \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٨} = ١\frac{١}{٨}$

٢) $٢\frac{١}{٣} + ٣\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤} = ٦\frac{٧}{١٢}$ كلم.

أقدّر النتيجة: سالب ستة تقريبًا زائد خمسة تقريبًا؛ فالناتج قريب من سالب واحد.

حقيبتي
www.haqibati.net
تم عمل الملخص من قبل موقع حقيبتي

الجبر: الأعداد النسبية

٧ استراتيجية حل المسألة: البحث عن نمط

أكتشف القاعدة ثم أتابع

أبحث عن علاقة تتكرر بين الأعداد أو الأشكال، ثم أستعملها للوصول إلى المطلوب، وأتحقق من استمرارها.

مثال: تمارين أحمد

أدى أحمد في الأسابيع الأربعة الأولى ٨ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٦ مرة في الدقيقة. متى يتجاوز ٥٦ مرة؟

الأسبوع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
عدد المرات	٨	١٢	١٨	٢٦	٣٦	٤٨	٦٢
الزيادة	–	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤

تزيد الزيادة بمقدار ٢ كل مرة. يتجاوز ٥٦ مرة في الأسبوع السابع.

↓

كيف أتحقق؟

أراجع الفروق المتتالية، وأتأكد أن الأسبوع السادس لا يحقق الهدف، وأن الأسبوع السابع يحققه.

أتدرب بنفسي

١ كم مرة يمكن لأحمد أداؤها في الأسبوع الثامن؟

٢ مقاعد مسرح: ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ ... كم مقعداً في الصف التاسع؟

٣ كرة أُسقطت من ٢٧٠ سم، وكانت ارتفاعات الارتدادات ١٨٠ ، ١٢٠ ، ٨٠ سم. بعد أي ارتداد يقل الارتفاع عن ٣٠ سم؟

أتحقق من إجابتي

١) ٦٢ + ١٦ = ٧٨ مرة.

٢) ١٢ + ٨ × ٥ = ٥٢ مقعداً.

٣) العامل المتكرر $\frac{٢}{٣}$. الارتداد الخامس نحو ٣٥.٦ سم، والسادس نحو ٢٣.٧ سم؛ إذن الارتداد السادس.

! قد يكون النمط زيادة ثابتة، أو زيادة تتغير بانتظام، أو ضرباً في عامل ثابت. لا أختار القاعدة من حدين فقط.

الجبر: الأعداد النسبية

٨ القوى والأسس

الأس عدد مرات تكرار العامل

الأساس هو العامل المكرر، **والأس** يبين عدد مرات استعماله عاملاً. القوة تعني ضرباً متكرراً.

مثال: من الضرب إلى القوة

$$٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^{٤} = ٨١$$

الأساس ٣، والأس ٤. ولا تعني القوة ضرب ٣ في ٤.

↓

مثال: قوة كسر

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤}$$

$$\frac{١٦}{٨١} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤}$$

أجمع العوامل المتشابهة

$$أ \times ب \times ب \times أ \times ب = أ^{٢} \times ب^{٣}$$

تكرر العامل أ مرتين، وتكرر العامل ب ثلاث مرات.

أتدرب بنفسي

١ أوجد قيمة $٢^{٦}$.

٢ أوجد قيمة $\left(\frac{١}{٧}\right)^{٣}$.

أتحقق من إجابتي

١) $٢^{٦} = ٦٤$

٢) $\left(\frac{١}{٧}\right)^{٣} = \frac{١}{٣٤٣}$

! إذا كان الأساس كسراً، فإن القوة تشمل البسط والمقام، كما توضح الأقواس.

الجبر: الأعداد النسبية

٨ القوى والأسس

الأس صفر والأس السالب

أي عدد غير الصفر مرفوع للأس صفر يساوي ١. والأس السالب يعني أخذ المقلوب، ولا يعني أن الناتج سالب.

القوة	قيمتها
$١٠^{١}$	١٠
$١٠^{٠}$	١
$١٠^{-١}$	$\frac{١}{١٠}$

مثال: أكتب الأس السالب بالمقلوب

$$٤^{-٣} = \frac{١}{٤^{٣}} = \frac{١}{٦٤}$$

أساس سالب

$$(-٤)^{٢} = ١٦$$

الأقواس تجعل السالب جزءاً من الأساس.

أس سالب

$$٤^{-٢} = \frac{١}{١٦}$$

أخذنا مقلوب مربع العدد ٤.

أتدرب بنفسي

١ أوجد $٥^{-٤}$.

٢ إذا كانت س = ٣، ول = ٥، فأوجد $س^{٢} \times ل^{٤}$.

أتحقق من إجابتي

١) $٥^{-٤} = \frac{١}{٦٢٥}$

٢) $٣^{٢} \times ٥^{٤} = ٩ \times ٦٢٥ = ٥٦٢٥$

! أقرأ موضع السالب بدقة: هل هو في الأساس داخل الأقواس، أم في الأس؟

حقيبتي
www.haqibati.net

الجبر: الأعداد النسبية

٩ الصيغة العلمية

من الصيغة العلمية إلى القياسية

في الأعداد الموجبة، تتكون الصيغة العلمية من عامل لا يقل عن ١ ويقل عن ١٠، مضروباً في قوة للعدد ١٠.

أفهم معنى إشارة الأس

نوع الأس	حركة الفاصلة عند التحويل إلى القياسية
موجب	إلى اليمين بعدد منازل يساوي الأس.
سالب	إلى اليسار بعدد منازل يساوي القيمة المطلقة للأس.

↓

مثال: أس موجب

$$٥.٣٤ \times ١٠^{٤} = ٥٣٤٠٠$$

حركت الفاصلة أربع منازل إلى اليمين.

مثال: أس سالب

$$٣.٢٧ \times ١٠^{-٣} = ٠.٠٠٣٢٧$$

حركت الفاصلة ثلاث منازل إلى اليسار.

أتدرب بنفسي

١ اكتب ٧.٤٢×١٠^{٥} بالصيغة القياسية.

٢ اكتب ٦.١×١٠^{-٢} بالصيغة القياسية.

أتحقق من إجابتي

١) ٧٤٢٠٠٠

٢) ٠.٠٦١

أضيف أصفاراً عند الحاجة. والأس السالب يدل هنا على عدد موجب صغير، وليس عدداً سالباً.

الجبر: الأعداد النسبية

٩ الصيغة العلمية

من القياسية إلى العلمية والمقارنة

أضع الفاصلة بعد أول رقم غير صفري من اليسار، وأعد المنازل التي تحركتها. إذا كان العدد بين صفر و١ كان الأس سالبًا.

مثال: عدد كبير

$$٣٧٢٥٠٠٠ = ٣.٧٢٥ \times ١٠^{٦}$$

بين موضعي الفاصلة ست منازل؛ فكتبت ١٠ للأس ٦.

مثال: عدد صغير

$$٠.٠٠٠٣١٦ = ٣.١٦ \times ١٠^{-٤}$$

بين موضعي الفاصلة أربع منازل؛ والأس سالب لأن العدد الأصلي أقل من ١.

↓

أقارن الصيغ العلمية الموجبة

إذا اختلف الأسان، فالأكبر أسًا هو الأكبر قيمة. وإذا تساوى الأسان، أقارن العاملين أمام قوة ١٠.

$$٢٩٦٠٠٠٠٠ = ٢.٩٦ \times ١٠^{٧}$$

$$٧٨٥٠٠٠٠ = ٧.٨٥ \times ١٠^{٦}$$

العدد الأول أكبر؛ فأسه ٧، وأس العدد الثاني ٦.

أتدرب بنفسي

١ اكتب ٤٣٠٠٠ بالصيغة العلمية.

٢ اكتب ٠.٠٠٠٠٩٠١ بالصيغة العلمية.

أتحقق من إجابتي

١) ٤.٣×١٠^{٤}

٢) ٩.٠١×١٠^{-٥}

! أتحقق بأن العامل أمام قوة ١٠ يقع من ١ إلى أقل من ١٠، ثم أعيد التحويل إلى الصورة الأصلية.

الجبر: الأعداد النسبية

مراجعة الفصل الأول

الأعداد النسبية وعملياتها

أحل أولاً، ثم أقارن بإجابة التحقق وأراجع سبب الإشارة أو اختيار العملية.

أختبر فهمي

١ اكتب ٠.٩٥ كسراً اعتيادياً في أبسط صورة.

٢ أوجد $-٥ \times \frac{١}{٤} \times (-٢ \frac{١}{٣})$.

٣ أوجد $-٦ \div \frac{١}{٨}$.

٤ أوجد $-\frac{٣}{٨} + \frac{٤}{٩}$.

٥ تحتاج خديجة إلى ٢ $\frac{٢}{٣}$ كوب طحين، ومعيارها ثلث كوب. كم مرة تملؤه؟

أتحقق من إجابتي

١) $٠.٩٥ = \frac{١٩}{٢٠}$

٢) $-٥ \frac{١}{٤} \times (-٢ \frac{١}{٣}) = \frac{٤٩}{٤} = ١٢ \frac{١}{٤}$

٣) $-٦ \div \frac{١}{٨} = -٤٨$

٤) $-\frac{٣}{٨} + \frac{٤}{٩} = \frac{٥}{٧٢}$

٥) $٢ \frac{٢}{٣} \div \frac{١}{٣} = ٨$ مرات.

أضرب الناتج في المقسوم عليه للتحقق من القسمة، وأستعمل التقدير للتحقق من حجم الإجابة.

الجبر: الأعداد النسبية

مراجعة الفصل الأول

القوى والصيغة العلمية

أربط المطلوب بالطريقة

عندما أرى...	أفكر في...
عاملاً يتكرر	الأس يختصر عدد مرات تكراره.
أسًا سالبًا	المقلوب، مع أساس غير صفري.
عددًا كبيرًا أو صغيرًا جدًا	عامل من ١ إلى أقل من ١٠ × قوة للعدد ١٠.

أراجع وأطبق

١ أوجد $٦^{-٤}$.

٢ إذا كان ك = ٤، وج = ٨، فأوجد $ك^{-٢} \times ج^{٣}$.

٣ اكتب ٨.٨٣×١٠^{-٧} بالصيغة القياسية.

٤ اكتب ٢٥٠٠٠ بالصيغة العلمية.

٥ أعداد المتسوقين في أربعة أيام: ٥٥٠ ، ٦١٠ ، ٦٧٠ ، ٧٣٠. ما عددهم في اليوم السادس إذا استمر النمط؟

أتحقق من إجابتي

١) $٦^{-٤} = \frac{١}{١٢٩٦}$

٢) $٤^{-٢} \times ٨^{٣} = ٣٢$

٣) ٠.٠٠٠٠٠٠٨٨٣

٤) ٢.٥×١٠^{٤}

٥) ٧٣٠ + ٢ × ٦٠ = ٨٥٠ متسوقًا.

! إذا اختلفت إجابتي، أحدد أول خطوة اختلفت فيها: التحويل، أم الإشارة، أم الحساب، أم التقريب.

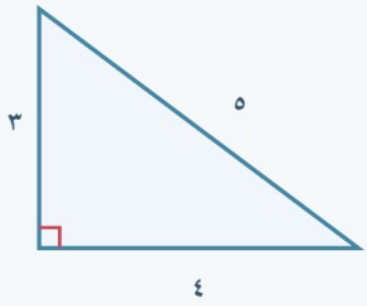
الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

الفصل الثاني

شرح مختصر • أمثلة بخطوات • تدريب ومراجعة

الفصل الثاني

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس



$$٣^{٢} + ٤^{٢} = ٥^{٢}$$

ماذا سأتعلم؟

- أوجد الجذور التربيعية وأقدّرها، وأصنف الأعداد الحقيقية.
- أحدد الوتر، وأستعمل نظرية فيثاغورس في المسائل.
- أمثّل النقاط وأجد نقطة المنتصف والمسافة بين نقطتين.

أقرأ القاعدة، وأتبع المثال، ثم أحل التدريب وأتحقق من الحساب والإشارة والوحدة.

حقيبتي
www.haqibati.net

ملخص الفصل الثاني

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

١ الجذور التربيعية

الجذر يعيدني إلى العدد قبل تربيعه

الجذر التربيعي لعدد هو عدد إذا ضربته في نفسه أعطى العدد الأصلي. المربع الكامل ينتج من تربيع عدد صحيح.

العدد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
مربعه	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠

مثال: الجذر الموجب

$$\sqrt{٦٤} = ٨$$

لأن $٨ \times ٨ = ٦٤$. والرمز وحده يدل على الجذر غير السالب.

أنتبه إلى الإشارة خارج الجذر

العبارة	معناها	الناتج
$\sqrt{٢٥}$	الجذر الموجب	٥
$-\sqrt{٢٥}$	سالب الجذر الموجب	−٥
$\pm\sqrt{٢٥}$	القيمتان الموجبة والسالبة	٥ أو −٥

الجذر يشمل البسط والمقام

$$-\sqrt{\frac{٢٥}{٣٦}} = -\frac{٥}{٦}$$

أجد جذر البسط وجذر المقام، ثم أضع الإشارة السالبة خارج الكسر.

أتدرب بنفسي

١ أوجد $\sqrt{٠.٠٦٤}$.

أتحقق من إجابتي

١) $\sqrt{٠.٠٦٤} = ٠.٨$

! للعدد الموجب جذران متعاكسان. أما صفر فله جذر واحد هو صفر.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

١ الجذور التربيعية

حل المعادلة يختلف عن حساب الرمز

إذا كانت س^2 = عدد موجب، أبحث عن عددين: أحدهما موجب والآخر سالب. كلاهما يعطي العدد نفسه عند التربيع.

مثال: أحل المعادلة ت^2 = ١٦٩

أجد ← $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

أكتب ← ت = ١٣ أو ت = −١٣.

أتحقق ← $١٣^{٢}$ = ١٦٩، و$(-١٣)^{٢}$ = ١٦٩.

↓

مثال حياتي: طول ضلع مربع

مساحة قطعة أرض مربعة ٥٢٩٠٠ م^2. ما طول ضلعها؟

$\sqrt{٥٢٩٠٠}$ = ٢٣٠

طول الضلع ٢٣٠ م. أختار القيمة الموجبة؛ لأن الطول لا يكون سالبًا.

أتدرب بنفسي

١ حل المعادلة ف^2 = ٣٦.

٢ رتبت ١٤٤ بلاطة في مربع. كم بلاطة في كل صف؟

أتحقق من إجابتي

١) ف = ٦ أو ف = −٦.

٢) $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ بلاطة.

أقرأ المطلوب: قيمة رمز الجذر، أم حل معادلة، أم طول؟ المطلوب يحدد هل أكتب قيمة واحدة أو قيمتين.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٢ تقدير الجذور التربيعية

أحصر الجذر بين عددين صحيحين

إذا لم يكن العدد مربعًا كاملاً، أحدد المربع الكامل الأصغر منه والمربع الكامل الأكبر منه. يقع جذره بين جذري هذين المربعين.

مثال: أقدّر جذر ٨

٨ بين ٤ و٩؛ لذلك جذر ٨ بين ٢ و٣.



$$\sqrt{٨} \approx ٣$$

عند التقريب إلى أقرب عدد كلي يكون الناتج ٣.

مثال: أقدّر جذر ٨٣

أحصر ← ٨١ أصغر من ٨٣، و٨٣ أصغر من ١٠٠؛ إذن الجذر بين ٩ و١٠.

أتحقق ← منتصف المسافة هو ٩,٥، ومربعه $٩.٥^{٢}$ = ٩٠.٢٥.

أقرب ← ٨٣ أقل من ٩٠,٢٥؛ إذن الجذر أقل من ٩,٥ وأقرب إلى ٩.

$$\sqrt{٨٣} \approx ٩$$

حقيبتي
www.haqibati.net

أتدرب بنفسي

١ قدّر $\sqrt{٢٨}$ إلى أقرب عدد كلي.

٢ قدّر $\sqrt{٦٠}$ إلى أقرب عدد كلي.

أتحقق من إجابتي

١) ٢٨ بين ٢٥ و٣٦؛ والجذر نحو ٥,٣، فيقرب إلى ٥.

٢) الجذر نحو ٧,٧، فيقرب إلى ٨.

! أتحقق من قرب الجذر نفسه من العدد الصحيح، وأستعين بالحاسبة إذا طلب تقريب أدق.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٢ تقدير الجذور التربيعية

التقريب مع الكسور العشرية

الطريقة نفسها تصلح للأعداد العشرية: أحصر العدد بين مربعين كاملين، ثم أحدد إلى أي عدد صحيح يكون الجذر أقرب.

مثال: أقدّر جذر ٢٣,٥

أحصر ← ٢٣,٥ بين ١٦ و٢٥، لذلك الجذر بين ٤ و٥.

أتحقق ← منتصف المسافة ٤,٥، ومربعه $٤.٥^{٢}$ = ٢٠.٢٥.

أقرب ← ٢٣,٥ أكبر من ٢٠,٢٥؛ إذن الجذر أكبر من ٤,٥ وأقرب إلى ٥.

$$\sqrt{٢٣.٥} \approx ٥$$

↓

مثال حياتي: طريق قطري

حديقة مربعة طول ضلعها ١٤ م. طول الطريق الواصل بين زاويتين متقابلتين يساوي جذر ٣٩٢ متراً. أقدره إلى أقرب متر.

٣٩٢ بين ٣٦١ و٤٠٠، فالجذر بين ١٩ و٢٠؛ وهو نحو ١٩,٨.

$$\sqrt{٣٩٢} \approx ٢٠$$

طول الطريق نحو ٢٠ م.

أتدرب بنفسي

١ قدّر $\sqrt{٣٨.٧}$ إلى أقرب عدد كلي.

٢ قدّر $\sqrt{٧٩.٢}$ إلى أقرب عدد كلي.

أتحقق من إجابتي

١) ٦

٢) ٩

! أكتب علامة التقريب ≈ عند استعمال قيمة مقربة، وأحتفظ بوحدة القياس في جواب المسألة.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

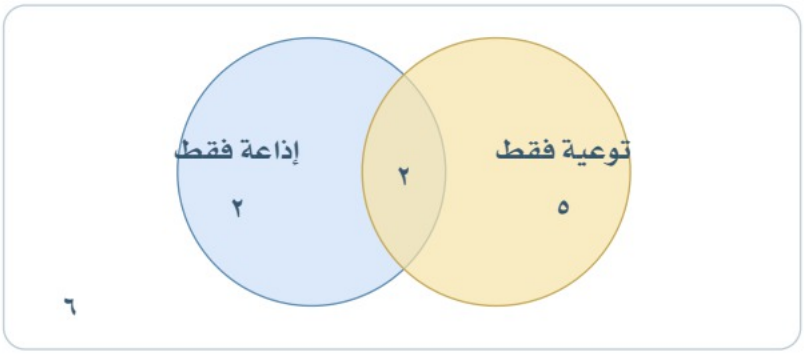
٣ استراتيجية حل المسألة: استعمال أشكال فن

أشكال فن: أبدأ بالجزء المشترك

أنظم المجموعات في دوائر متقاطعة. أضع عدد من ينتمون إلى المجموعتين في التقاطع أولاً؛ حتى لا أعدّهم مرتين.

مثال: النشاط المدرسي

من ١٥ طالبًا: ٤ في الإذاعة، و٧ في التوعية الإسلامية، ومنهم طالبان في النشاطين معًا. كم طالبًا لم يشارك في أي منهما؟



المشترك ← أضع ٢ في التقاطع.

كل جزء ← الإذاعة فقط: ٤ − ٢ = ٢. التوعية فقط: ٧ − ٢ = ٥.

الباقون ← ١٥ − ٢ − ٢ − ٥ = ٦ طلاب خارج الدائرتين.

أتدرب بنفسي

١ من ٨٥ طالبًا: ٤٠ يلعبون القدم، و٣١ السلة، و١٢ يلعبون الرياضتين. كم طالبًا لا يلعب أيًا منهما؟

أتحقق من إجابتي

١) في رياضة واحدة على الأقل: ٤٠ + ٣١ − ١٢ = ٥٩. الباقون: ٨٥ − ٥٩ = ٢٦ طالبًا.

! العدد المعطى لكل نشاط يشمل المشاركين في النشاطين، ما لم يقل السؤال: «فقط».

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٤ الأعداد الحقيقية

أبسط العدد ثم أصنفه

الأعداد الحقيقية تضم الأعداد النسبية وغير النسبية. العدد غير النسبي لا يكتب كسراً من عددين صحيحين؛ وتمثيله العشري غير منتهٍ وغير دوري.

الأعداد الحقيقية

غير النسبية
مثل جذر ٢

النسبية: مثل نصف و٠,٢٥

الصحيحة: ... −٢، −١، ٠، ١، ٢ ...

الكلية: ٠، ١، ٢، ٣ ...

أمثلة على التصنيف

العدد بعد تبسيطه	كل المجموعات التي ينتمي إليها
$\sqrt{٣٦} = ٦$	كلي، صحيح، نسبي، حقيقي.
-٤	صحيح، نسبي، حقيقي.
$٠.\overline{٢٥}$	نسبي، حقيقي؛ لأنه عشري دوري.
$\sqrt{٧}$	غير نسبي، حقيقي؛ لأن ٧ ليس مربعاً كاملاً.

أتدرب بنفسي

١ صنف $\sqrt{١٠٠}$.

٢ صنف سالب $\sqrt{٧}$.

حقيبتي
www.haqibati.net

أتحقق من إجابتي

١) يساوي ١٠؛ كلي، صحيح، نسبي، حقيقي.

٢) غير نسبي، حقيقي.

تنبيه: الجذور ليست كلها غير نسبية؛ فجذر ٣٦ عدد نسبي. وأصنف بعد التبسيط دائماً.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٤ الأعداد الحقيقية

المقارنة والخصائص

للمقارنة، أبسط العددين أو أكتبهما بالصورة العشرية. وللتمثيل على الخط، أقدّر إلى الدقة المطلوبة، ثم أحدد موضع العدد.

مثال: أقارن جذر ٧ مع ٢ وثلثين

جذر ٧ نحو ٢,٦٤٥٧٥...، و٢ وثلثان = ٢,٦٦٦٦...؛ لذلك جذر ٧ أصغر. لا أقربهما مبكراً إلى منزلة واحدة.

مثال: أقدر إلى أقرب عُشر

$$\sqrt{٦} \approx ٢.٤$$

$$-\sqrt{٣} \approx -١.٧$$

الأول بين ٢ و٣، والثاني بين −٢ و−١.



أتدرب بنفسي

١ قدّر $\sqrt{٢٢}$ إلى أقرب عُشر.

٢ قارن $\sqrt{٦.٢٥}$ مع ٢ $\frac{١}{٢}$.

أتحقق من إجابتي

١) ٤.٧

٢) متساويان؛ فكلاهما ٢,٥.

! أقرب إلى الدقة المطلوبة، مع إبقاء إشارة السالب خارج الجذر.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٤ الأعداد الحقيقية

خصائص تساعدني على الحساب

تتحقق خصائص الجمع والضرب المعروفة مع الأعداد الحقيقية أيضًا. أستعمل الخاصية عندما تجعل الحساب أسهل.

الإبدال والتجميع

الإبدال يغير الترتيب في الجمع أو الضرب. والتجميع يغير موضع الأقواس دون تغيير ترتيب الأعداد.

$$٢.٥ + ٣.٢ = ٣.٢ + ٢.٥$$

مثلاً: $(٢ + ١) + ٥ = ٢ + (١ + ٥)$.

↓

التوزيع

أضرب العدد خارج الأقواس في كل حد داخلها:

$٢ \times (٣ + ٥) = ٢ \times ٣ + ٢ \times ٥ = ١٦$.

المحايد والنظير

الفكرة	مثال
محايد الجمع ٠ والضرب ١	أ + ٠ = أ، وأ × ١ = أ
النظير الجمعي	$٤ + (-٤) = ٠$
النظير الضربي	$\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢} = ١$

أتدرب بنفسي

١ ما النظير الجمعي للعدد ٧؟

٢ ما النظير الضربي للعدد ٥؟

أتحقق من إجابتي

١) -٧

٢) $\frac{١}{٥}$

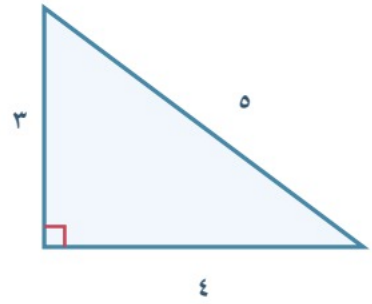
! الإبدال والتجميع لا يعممان على الطرح والقسمة. وللصفر نظير جمعي، وليس له نظير ضربي.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

أكتشف نظرية فيثاغورس

مساحات المربعات على أضلاع مثلث قائم

أرسم مربعاً على كل ضلع من أضلاع مثلث قائم الزاوية، ثم أقارن المساحات.



طول الضلع	مساحة المربع عليه
٣	$٣^{٢} = ٩$
٤	$٤^{٢} = ١٦$
٥	$٥^{٢} = ٢٥$

ماذا ألاحظ؟

$$٩ + ١٦ = ٢٥$$

مساحة المربع على أطول ضلع تساوي مجموع مساحتي المربعين على الضلعين الآخرين.

أتدرب بنفسي

١ إذا كان طولا ساقي مثلث قائم ٦ سم و٨ سم، فما مساحة المربع على الوتر؟ وما طول الوتر؟

أتحقق من إجابتي

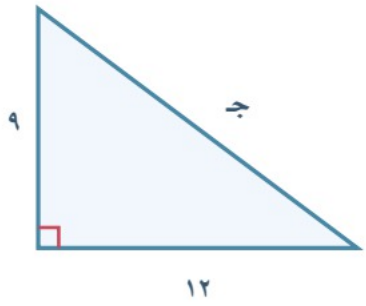
١) المساحة ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ سم^{2}. طول الوتر ١٠ سم.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٥ نظرية فيثاغورس

أحدد الوتر قبل التعويض

الوتر يقابل الزاوية القائمة، وهو أطول الأضلاع. الساقان يصنعان الزاوية القائمة. في هذا المثلث: مربع الوتر = مجموع مربعي الساقين.



$$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$$

مثال: أجد الوتر

أعوض ← $جـ^{٢} = ٩^{٢} + ١٢^{٢}$

أحسب ← $جـ^{٢} = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$

أجذر ← $جـ = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$

طول الوتر ١٥ سم، وهو أكبر من ٩ ومن ١٢؛ فالجواب معقول.

أتدرب بنفسي

١ طولا ساقي مثلث قائم ١٢ سم و١٦ سم. أوجد طول الوتر.

٢ طولا الساقين ٥ ملم و١٢ ملم. أوجد طول الوتر.

أتحقق من إجابتي

١) $١٢^{2} + ١٦^{2} = ٤٠٠$؛ طول الوتر ٢٠ سم.

٢) الوتر ١٣ ملم.

! أستعمل النظرية مع مثلث قائم الزاوية. ولا أختار الوتر اعتماداً على اتجاه الرسم.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٥ نظرية فيثاغورس

أجد ساقًا وأختبر المثلث

لإيجاد ساق مجهولة، أطرح مربع الساق المعلومة من مربع الوتر. وللتحقق من كون مثلث قائماً، أختبر أكبر ضلع بوصفه الوتر المحتمل.

مثال: الوتر ٢٤ م وإحدى الساقين ٨ م

أطرح ← $ب^{٢} = ٢٤^{٢} - ٨^{٢} = ٥١٢$

أجذر ← $ب = \sqrt{٥١٢} \approx ٢٢.٦$

طول الساق نحو ٢٢,٦ م؛ وهو أقل من طول الوتر.

↓

عكس النظرية: هل المثلث قائم؟

أضلاعه ٥ سم و١٢ سم و١٣ سم. أختار ١٣ لأنه الأكبر:

$$١٣^{٢} = ١٦٩$$

$$٥^{٢} + ١٢^{٢} = ١٦٩$$

تساوى الناتجان؛ إذن المثلث قائم الزاوية.

أتدرب بنفسي

١ الوتر ٢٥ م وإحدى الساقين ٧ م. أوجد الساق الأخرى.

٢ هل المثلث ذو الأضلاع ٤ م، ٧ م، ٥ م قائم؟

أتحقق من إجابتي

١) جذر (٦٢٥ − ٤٩) = جذر ٥٧٦ = ٢٤ م.

٢) لا؛ أكبر ضلع ٧، ومربعه ٤٩، بينما $٤^{2} + ٥^{2} = ٤١$.

! لا أجمع مربعي الضلعين عند البحث عن ساق، ولا أقبل طولاً سالبًا في المسائل الهندسية.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

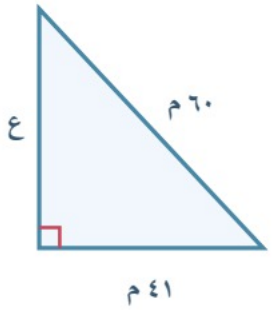
٦ تطبيقات على نظرية فيثاغورس

أحول المسألة إلى مثلث قائم

أرسم الموقف، وأحدد الأطوال المعطاة والمطلوب، وأضع علامة الزاوية القائمة، ثم أطبق فيثاغورس.

مثال: ارتفاع مظلي

طول حبل المظلة ٦٠ م، والمسافة الأفقية ٤١ م. أجد الارتفاع الرأسي عن سطح الماء.



أحدد ← الحبل هو الوتر. المطلوب ساق؛ لذلك أطرح.

أحسب ← $ع^{٢} = ٦٠^{٢} - ٤١^{٢} = ١٩١٩$

أقرب ← $ع = \sqrt{١٩١٩} \approx ٤٤$ م إلى أقرب متر.

أتدرب بنفسي

١ طائرتان تبعد إحداهما أفقيًا ١٠ كلم ورأسيًا ٧ كلم عن الأخرى. أوجد المسافة بينهما إلى أقرب عُشر.

أتحقق من إجابتي

١) جذر (١٠٠ + ٤٩) ≈ ١٢,٢ كلم.

! أكتب الوحدة بعد استخراج الجذر؛ فإذا كانت المربعات بالمتر المربع، فطول الضلع بالمتر.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

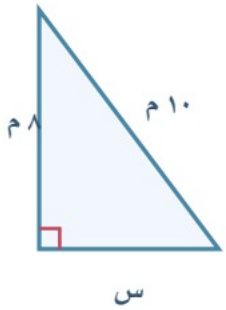
٦ تطبيقات على نظرية فيثاغورس

أنتبه إلى الجزء المطلوب من الشكل

قد يعطيني حساب فيثاغورس نصف الطول المطلوب، أو أحتاج إلى رسم قطر المستطيل. أرجع إلى السؤال بعد الحساب.

مثال: مدى جهاز رش

نصف قطر مدى الرش ١٠ م، ويبعد مركزه ٨ م عن حافة طريق مستقيمة. ما طول الجزء من الحافة داخل مدى الرش؟



نصفه ← $س^{٢} = ١٠^{٢} - ٨^{٢} = ٣٦$

أجذره ← $س = ٦$

كله ← $٢ \times ٦ = ١٢$ م؛ لأن الجزء المطلوب يتكون من نصفين متساويين.

أتدرب بنفسي

١ درج ارتفاعه ١,٥ م وقاعدته ٣,٦ م. أوجد البعد المستقيم من بدايته إلى نهايته.

٢ مستطيل أبعاده ١٥ م و٧,٥ م. ما طول قطره إلى أقرب متر؟

أتحقق من إجابتي

١) جذر $(١,٥^{2} + ٣,٦^{2}) = ٣,٩$ م.

٢) جذر $٢٨١,٢٥ \approx ١٧$ م.

! أراجع: هل وجدت طول الضلع الذي يسأل عنه السؤال، أم وجدت جزءاً منه فقط؟

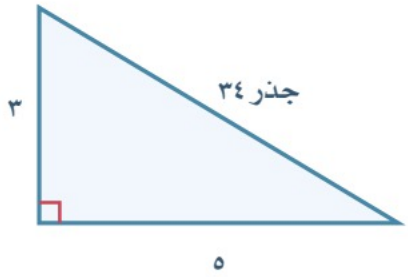
الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

أمثل عدداً غير نسبي بدقة

أنقل طول الوتر إلى خط الأعداد

لتمثيل جذر ٣٤، أبحث عن مربعين مجموعهما ٣٤، ثم أبني مثلثًا قائمًا.

$$٣٤ = ٥^{٢} + ٣^{٢}$$



أرسم	أرسم ساقين متعامدتين طولهما ٣ وحدات و٥ وحدات، ثم أصل الطرفين.
أنقل	أفتح الفرجار بمقدار طول الوتر، ثم أثبت رأسه عند صفر على خط الأعداد.
أحدد	أرسم قوسًا نحو الجهة الموجبة. نقطة تقاطعه مع الخط تمثل جذر ٣٤.

لماذا تنجح الطريقة؟

طول الوتر يساوي جذر مجموع مربعي الساقين؛ أي جذر ٣٤. أنقل الطول نفسه دون استبداله بعدد عشري مقرب.

أتدرب بنفسي

١ ما طولا ساقين يمكن استعمالهما لتمثيل $\sqrt{١٠}$ ؟

أتحقق من إجابتي

١) ١ و٣؛ لأن $١^2 + ٣^2 = ١٠$.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٧ هندسة: الأبعاد في المستوى الإحداثي

أقرأ الزوج المرتب وأمثله

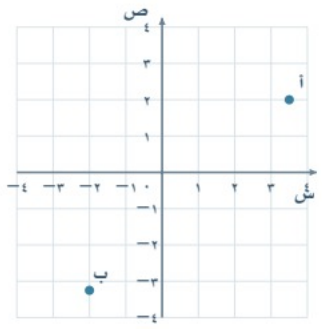
أبدأ من نقطة الأصل: أتحرك أفقيًا حسب الإحداثي السيني أولاً، ثم رأسيًا حسب الإحداثي الصادي. اليمين والأعلى موجبان، واليسار والأسفل سالبان.

س أولاً، ثم ص

الزوج المرتب (٣.٥ ، ٢) يعني ٣,٥ يمينًا ثم ٢ إلى الأعلى.

ألاحظ الإشارات

النقطة (— ٢ ، — ٣.٢٥) تعني وحدتين يساراً ثم ٣,٢٥ إلى الأسفل.



الربع	إشارة س	إشارة ص
الأول	موجبة	موجبة
الثاني	سالبة	موجبة
الثالث	سالبة	سالبة
الرابع	موجبة	سالبة

أتدرب بنفسي

١ في أي ربع تقع (— ١.٥ ، ٣)؟

٢ في أي ربع تقع (٠.٥ ، — ٣.٧٥)؟

أتحقق من إجابتي

١) الربع الثاني.

٢) الربع الرابع.

! النقطة على أحد المحورين لا تقع في أي ربع. والعدد الأول في الزوج هو س دائمًا.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

٧ هندسة: الأبعاد في المستوى الإحداثي

نقطة المنتصف: أجمع ثم أقسم على ٢

نقطة المنتصف تقع على القطعة المستقيمة وعلى بعدين متساويين من طرفيها. آخذ متوسط الإحداثيين السينيين، ومتوسط الإحداثيين الصاديين.

القانون بالكلمات

س المنتصف = (س الطرف الأول + س الطرف الثاني) ÷ ٢.

ص المنتصف = (ص الطرف الأول + ص الطرف الثاني) ÷ ٢.

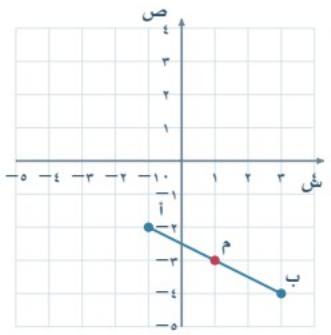
مثال: أجد منتصف القطعة

طرفاها أ (−١ ، −٢)، وب (٣ ، −٤).

س ← −١ + ٣ = ٢ ثم ٢ ÷ ٢ = ١

ص ← −٢ + (−٤) = −٦ ثم −٦ ÷ ٢ = −٣

النتيجة ← نقطة المنتصف م (١ ، −٣).



أتدرب بنفسي

١ أوجد منتصف القطعة بين (٠ ، ٠) و(٥ ، ١٢).

أتحقق من إجابتي

١) (٢.٥ ، ٦)

! في نقطة المنتصف أجمع الإحداثيات المتناظرة؛ ولا أطرحها.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

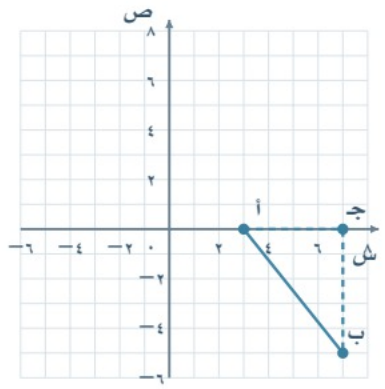
٧ هندسة: الأبعاد في المستوى الإحداثي

المسافة: فروق الإحداثيات ثم فيثاغورس

أرسم مثلثًا قائمًا وتره القطعة بين النقطتين. طول ساقه الأفقية هو مقدار الفرق بين س، وطول ساقه الرأسية هو مقدار الفرق بين ص.

مثال: المسافة بين نقطتين

أ (٣ ، ٠)، وب (٧ ، −٥). الفرق الأفقي ٤، والفرق الرأسي ٥.



$$ف^{٢} = ٤^{٢} + ٥^{٢} = ٤١$$

$$ف = \sqrt{٤١} \approx ٦.٤$$

المسافة نحو ٦,٤ وحدات.

حقيبتي
www.haqibati.net

إذا كانت كل وحدة تمثل مسافة حقيقية

أضرب عدد الوحدات في قيمة الوحدة على الخريطة. وللدقة أؤخر تقريب الناتج إلى آخر خطوة.

أتدرب بنفسي

١ أوجد المسافة بين (٢ ، ٠) و(٥ ، −٤).

٢ سوق ومستشفى بينهما ٥ وحدات على خريطة؛ كل وحدة نصف كيلومتر. ما المسافة الحقيقية؟

أتحقق من إجابتي

١) الفرقان ٣ و٤؛ والمسافة ٥ وحدات.

٢) ٥ × ٠,٥ = ٢,٥ كلم.

! نقطة المنتصف تحتاج جمعًا؛ أما المسافة فتبدأ بفروق الإحداثيات، وتكون قيمتها غير سالبة.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

مراجعة الفصل الثاني

الجذور والأعداد الحقيقية وأشكال فن

أفصل بين حساب الجذر، وحل المعادلة، والتصنيف بعد التبسيط.

أختبر فهمي

١ أوجد $\sqrt{٢٢٥}$.

٢ أوجد سالب جذر ٠,٢٥ .

٣ حل $س^2 = ٨١$.

٤ قدّر جذر ١١٨ إلى أقرب عدد كلي.

٥ صنف سالب جذر ٦٤.

٦ من ٥٠ زبونًا: ١٥ يحبون الجبن، و٢٥ اللبنة، و٤ يحبون النوعين. كم لا يحب أيًا منهما؟

أتحقق من إجابتي

١) ١٥

٢) −٠.٥

٣) س = ٩ أو س = −٩.

٤) ١١

٥) يساوي −٨: صحيح، نسبي، حقيقي.

٦) ٥٠ − (١٥ + ٢٥ − ٤) = ١٤ زبونًا.

إذا تكرر الجزء المشترك في مجموعتي فن، أطرحه مرة واحدة عند حساب العدد في إحداهما أو كلتيهما.

الأعداد الحقيقية ونظرية فيثاغورس

مراجعة الفصل الثاني

فيثاغورس والإحداثيات

أختار القانون المناسب

المطلوب	ما أفعله
وتر	أجمع مربعي الساقين ثم آخذ الجذر.
ساق	أطرح مربع الساق المعلومة من مربع الوتر ثم آخذ الجذر.
منتصف	أحسب متوسط كل إحداثيين متناظرين.
مسافة بين نقطتين	أجد الفرقين الأفقي والرأسي، ثم أستعمل فيثاغورس.

أراجع وأطبق

١ طولا ساقي مثلث قائم ٦ سم و٨ سم. أوجد الوتر.

٢ وتر مثلث قائم ٢٠ م، وإحدى الساقين ١٢ م. أوجد الأخرى.

٣ هل المثلث ذو الأضلاع ١٦ و٣٠ و٣٤ قائم؟

٤ أوجد منتصف القطعة بين (٢ ، ٣) و(٣ ، ٥).

٥ أوجد المسافة بين (−٢ ، −٢) و(٥ ، ٦) إلى أقرب عُشر.

أتحقق من إجابتي

١) ١٠ سم.

٢) ١٦ م.

٣) نعم؛ $١٦^2 + ٣٠^2 = ٣٤^2 = ١١٥٦$.

٤) (٢.٥ ، ٤)

٥) جذر ١١٣ ≈ ١٠,٦ وحدات.

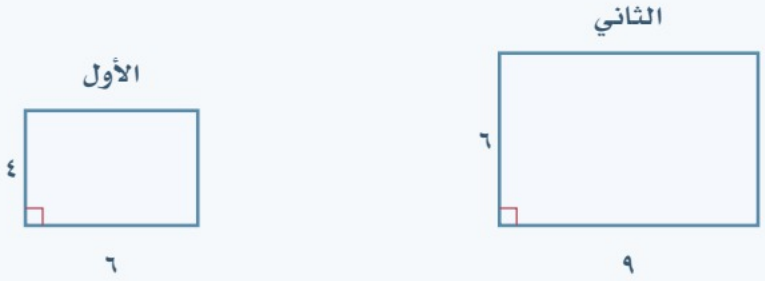
! أراجع الرسم والإشارة والوحدة، وأتأكد أن الوتر هو الأكبر وأن نقطة المنتصف تقع بين الطرفين.

الفصل الثالث

شرح مختصر • أمثلة بخطوات • تدريب ومراجعة

الفصل الثالث

التناسب والتشابه



$$\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٩}{٦}$$

ماذا سأتعلم؟

- أميز العلاقة المتناسبة، وأجد معدل التغير.
- أحل التناسب، وأربط الأضلاع المتناظرة في الأشكال المتشابهة.
- أكبر الأشكال وأصغرها، وأستعمل القياس غير المباشر.

أقرأ القاعدة، وأتبع المثال، ثم أحل التدريب وأتحقق من الحساب والإشارة والوحدة.

التناسب والتشابه

١ العلاقات المتناسبة وغير المتناسبة

التناسب يعني ثبات النسبة

تكون الكميتان متناسبتين إذا ظلت النسبة بينهما ثابتة. أقسم الكمية نفسها على الكمية الأخرى في كل مرة، وأحافظ على ترتيب الوحدات.

مثال: ثمن الهدايا

ثمن الهدية الواحدة ٨ ريالات. أرتب القيم وأحسب ثمن الهدية:

عدد الهدايا	١	٢	٣	٤
الثمن بالريال	٨	١٦	٢٤	٣٢
الثمن ÷ العدد	٨	٨	٨	٨

النسبة ثابتة؛ إذن الثمن متناسب مع عدد الهدايا.

↓

مثال: أجر العمل

يتقاضى صالح ٦٥ ريالاً عن كل يوم. أجر يومين ١٣٠ ريالاً، وأجر ثلاثة أيام ١٩٥ ريالاً.

$$\frac{٦٥}{١} = \frac{١٣٠}{٢} = \frac{١٩٥}{٣} = ٦٥$$

النسبة ثابتة وتساوي ٦٥ ريالاً لكل يوم؛ إذن العلاقة متناسبة.

أتدرب بنفسي

١ يشرب فيل ٢٢٥ لترًا كل يوم. هل كمية الماء الكلية متناسبة مع الأيام؟

٢ هل محيط مربع متناسب مع طول ضلعه؟

أتحقق من إجابتي

١) نعم، إذا استمر المعدل نفسه؛ النسبة ٢٢٥ لترًا لكل يوم.

٢) نعم؛ المحيط ÷ طول الضلع = ٤ دائمًا.

! لا يكفي أن تزيد الكميتان معًا. أختبر النسبة في أكثر من حالة.

التناسب والتشابه

١ العلاقات المتناسبة وغير المتناسبة

وجود مبلغ ثابت قد يغير النسبة

قد تزيد الكمية بمقدار ثابت، وتبقى العلاقة غير متناسبة. أختبر القسمة بدل الاكتفاء بالنظر إلى الزيادة.

مثال: ثمن الوجبات مع التوصيل

الوجبة ١٤ ريالاً، ويضاف ريالان عن توصيل الطلب كله:

عدد الوجبات	١	٢	٣	٤
التكلفة	١٦	٣٠	٤٤	٥٨
التكلفة ÷ العدد	١٦	١٥	نحو ١٤,٧	١٤,٥

النسب مختلفة؛ إذن التكلفة الكلية غير متناسبة مع عدد الوجبات.

↓

مثال: ادخار مع مبلغ سابق

مع راشد ٤٢٠ ريالاً، ويضيف ٢٠ ريالاً كل أسبوع. بعد أسبوع: ٤٤٠، وبعد أسبوعين: ٤٦٠.

$٤٤٠ \div ١ = ٤٤٠$

$٤٦٠ \div ٢ = ٢٣٠$

الرصيد الكلي غير متناسب مع الأسابيع. أما المال الجديد المدخر وحده فمتناسب معها.

أتدرب بنفسي

١ مع مهند ٢٠٠ ريال، وينفق ٢٠ ريالاً لكل لعبة. هل المتبقي يتناسب مع عدد الألعاب؟

٢ هل مساحة المربع متناسبة مع طول ضلعه؟

أتحقق من إجابتي

١) لا؛ بعد لعبة يتبقى ١٨٠، وبعد لعبتين ١٦٠؛ والنسب مختلفة.

٢) لا؛ مساحة مربع ضلعه ٢ تساوي ٤، وضلعه ٣ تساوي ٩؛ فالنسبتان ٢ و٣ مختلفتان.

! أقرأ الكمية المطلوبة بدقة: المبلغ الكلي أم الزيادة وحدها؟

التناسب والتشابه

٢ معدل التغير

أقسم مقدار التغير على مقدار التغير الآخر

معدل التغير يصف كيف تتغير كمية بالنسبة إلى أخرى. مثلاً: معدل تغير الطول = التغير في الطول ÷ التغير في العمر.

مثال: معدل موجب

طول ثامر ١٣٠ سم عندما كان عمره ٨ سنوات، و١٤٥ سم عندما صار عمره ١١ سنة:

الطول ← ١٤٥ − ١٣٠ = ١٥ سم.

العمر ← ١١ − ٨ = ٣ سنوات.

المعدل ← ١٥ ÷ ٣ = ٥ سم لكل سنة.

المعدل موجب؛ لأن الطول ازداد.

↓

مثال: معدل سالب

انخفض سعر جهاز من ٤٥٠٠ إلى ٣٥٠٠ ريال خلال سنتين:

$$٣٥٠٠ - ٤٥٠٠ = -١٠٠٠$$

$$-١٠٠٠ \div ٢ = -٥٠٠$$

المعدل − ٥٠٠ ريال لكل سنة، أي انخفاض بمقدار ٥٠٠ ريال سنوياً خلال هذه المدة.

أتدرب بنفسي

١ ارتفعت الحرارة من ٢٥° إلى ٣٧° خلال ساعتين. ما معدل تغيرها؟

أتحقق من إجابتي

١) (٣٧ − ٢٥) ÷ ٢ = ٦ درجات لكل ساعة.

! أحافظ على ترتيب الطرح في البسط والمقام: القيمة الثانية ناقص الأولى في كليهما.

التناسب والتشابه

٢ معدل التغير

إشارة المعدل ومعناه

أقرأ التمثيل من اليسار إلى اليمين. الخط الصاعد يدل على تغير موجب، والهابط على تغير سالب، والأفقي على تغير صفري.

المعدل	المعنى	مثال
موجب	الكمية تزداد	زيادة الطول.
سالب	الكمية تنقص	نقص طول شمعة تحترق.
صفر	الكمية لا تتغير	ثبات العدد بين وقتين.

مثال: أقارن بين فترتين

عدد مستعملي الإنترنت في بيانات الكتاب بالملايين: ٤,٨ ثم ٧,٦ ثم ٩,٣ في ثلاثة أعوام متتالية.

$$٧.٦ - ٤.٨ = ٢.٨$$

$$٩.٣ - ٧.٦ = ١.٧$$

كل مدة سنة؛ فالزيادة في الفترة الأولى أكبر: ٢,٨ مليون مقابل ١,٧ مليون.

↓

أتدرب بنفسي

١ زاد عدد زوار المكتبة من ١١٠ إلى ١٢٣ في يوم واحد. ما معدل التغير؟

٢ تغير العدد من ١٥٥ يوم الثلاثاء إلى ٧٥ يوم الخميس. ما المعدل اليومي؟

أتحقق من إجابتي

١) ١٣ طالبًا في اليوم.

٢) (٧٥ − ١٥٥) ÷ ٢ = −٤٠ طالبًا لكل يوم؛ أي انخفاض متوسطه ٤٠.

! عند مقارنة سرعة الانخفاض، أقارن مقدار النقص دون الإشارة. أما «أكبر معدل» حسابيًا فأنتبه إلى ترتيب الأعداد السالبة.

التناسب والتشابه

٣ المعدل الثابت للتغير

العلاقة الخطية لها معدل ثابت

تكون العلاقة خطية إذا كان معدل التغير ثابتًا بين أزواج القيم. لا أقارن فروق ص وحدها إذا كانت فروق س غير متساوية.

مثال: المبلغ المتبقي

عدد المشتريات	٣	٦	٩	١٢
المتبقي بالريال	١٧٠	١٤٠	١١٠	٨٠

كل زيادة ٣ مشتريات يقابلها نقص ٣٠ ريالاً:

$$-٣٠ \div ٣ = -١٠$$

المعدل ثابت؛ إذن العلاقة خطية، وينقص المبلغ ١٠ ريالات لكل عملية شراء.

↓

مثال: فروق س غير متساوية

الساعات	٥	٨	١٢	٢٤
الأجهزة	١٥	٢٤	٣٦	٧٢

المعدلات: ٩ ÷ ٣ = ٣، و١٢ ÷ ٤ = ٣، و٣٦ ÷ ١٢ = ٣. العلاقة خطية.

أتدرب بنفسي

١ تغيرت الحرارة عند الدقائق ٥، ١٠، ١٥، ٢٠ إلى ٣٥، ٣٢، ٣٠، ٢٨. هل العلاقة خطية؟

أتحقق من إجابتي

١) لا؛ المعدلات سالب ثلاثة أخماس، ثم سالب خُمسين، ثم سالب خُمسين؛ ليست ثابتة.

! أكتب وحدة المعدل، مثل جهاز لكل ساعة، أو ريال لكل عملية شراء.

التناسب والتشابه

٣ المعدل الثابت للتغير

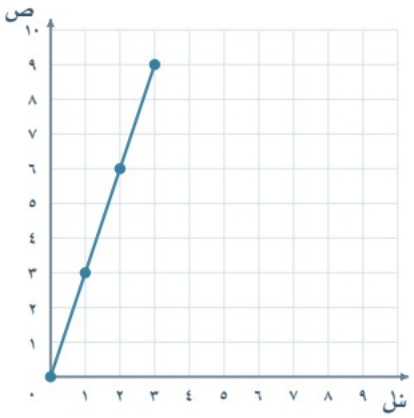
ليست كل علاقة خطية متناسبة

العلاقة الخطية المتناسبة تجمع شرطين: معدل تغير ثابت، ونسبة ص ÷ س ثابتة عندما س لا تساوي صفراً. ويمر تمثيلها بنقطة الأصل.

مثال: ثمن القصص

عدد القصص	٠	١	٢	٣
الثمن بالريال	٠	٣	٦	٩

المعدل ٣ ريالات لكل قصة، والنسبة ٣. التمثيل يمر بالأصل؛ إذن العلاقة خطية متناسبة.



أقارن بمثال الوجبات والتوصيل

زيادة تكلفة كل وجبة ١٤ ريالاً؛ فالعلاقة خطية. لكن عند عدم طلب وجبات تبقى رسوم التوصيل في النموذج ٢؛ والنسبة ليست ثابتة، فالعلاقة غير متناسبة.

أتدرب بنفسي

١ ما المعدل في جدول الهدايا: ٢ ↔ ٨,٥، ٤ ↔ ١٧، ٦ ↔ ٢٥,٥؟ وهل هو متناسب؟

أتحقق من إجابتي

١) ٤,٢٥ ريالات لكل هدية؛ علاقة خطية متناسبة.

! أميز بين مقدار الزيادة أو النقصان، والنسبة بين القيمتين في الصف نفسه.

التناسب والتشابه

٤ حل التناسب

التناسب مساواة بين نسبتين

أكتب نسبتين متكافئتين، وأحافظ على ترتيب الكميات. في التناسب تتساوى نواتج الضرب التبادلي؛ وأستعمل ذلك لإيجاد المجهول.

مثال: أتحقق من التناسب

$$\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$$

$$٦ \times ٤ = ٨ \times ٣ = ٢٤$$

↓

مثال: ارتفاع درجة الحرارة

ترتفع الحرارة ٧ درجات خلال ساعتين. كم ساعة تحتاج لارتفاع ١٣ درجة بالمعدل نفسه؟

أرتب ← أكتب الدرجات في البسط، والساعات في المقام.

أتناسب ← $\frac{٧}{٢} = \frac{١٣}{ن}$

أضرب ← $٧ \times ن = ٢ \times ١٣ = ٢٦$

أقسم ← $ن = ٢٦ \div ٧ \approx ٣.٧$ ساعات.

أتدرب بنفسي

١ حل $\frac{٣٣}{ر} = \frac{١١}{٢}$.

٢ ٣ معلمين لكل ٤٠ طالبًا. كم معلمًا يلزم لـ١٢٠ طالبًا؟

أتحقق من إجابتي

١) ر = ٦؛ لأن $١١ \times ٦ = ٣٣ \times ٢$.

٢) ٩ معلمين.

! أكتب اسم الكمية بجانب النسبة أولاً، ثم أتأكد من تطابق ترتيبها في النسبتين.

التناسب والتشابه

٤ حل التناسب

أكتب معادلة وأجري تنبؤًا

ثابت التناسب هو النسبة الثابتة. إذا عرفت قيمته، أكتب: الكمية المطلوبة = ثابت التناسب × الكمية الأخرى.

مثال: معادلة ثمن البنزين في المسألة

اشترى عادل ٣٠ لترًا بمبلغ ٥٤ ريالاً. الثمن لكل لتر:

$$٥٤ \div ٣٠ = ١.٨$$

إذا كان ك يمثل الثمن، ول عدد اللترات، فإن ك = ١,٨ × ل.

$$١.٨ \times ٤٢ = ٧٥.٦$$

ثمن ٤٢ لترًا وفق معطيات المثال يساوي ٧٥,٦ ريالاً.

↓

مثال: التنبؤ من جزء إلى الكل

نسبة المتبرعين بفئة O إلى بقية الفئات ٣٧ : ٤٣. إذن جزء O من الجميع هو ٣٧ من ٨٠.

$$\frac{٣٧}{٨٠} \times ٣٠٠ = ١٣٨.٧٥$$

أتوقع نحو ١٣٩ شخصًا من ٣٠٠ متبرع. هذا توقع مقرب.

أتدرب بنفسي

١ يطبع رامي صفحتين في ١٥ دقيقة. كم دقيقة يحتاج لطباعة ١٠ صفحات؟

٢ يتقاضى عامل ٨٤ ريالاً لكل ٣ ساعات. كم يتقاضى عن ٤,٥ ساعات؟

أتحقق من إجابتي

١) ٧٥ دقيقة؛ لأن ١٥ ÷ ٢ × ١٠ = ٧٥.

٢) المعدل ٢٨ ريالاً للساعة؛ والأجر ١٢٦ ريالاً.

إذا كانت النسبة جزءًا إلى جزء آخر، أجمع الجزأين أولاً عندما أحتاج نسبة الجزء إلى الكل.

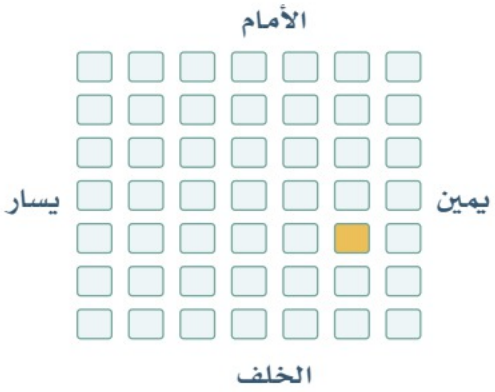
٥ استراتيجية حل المسألة: الرسم

الرسم ينظم المعطيات

أرسم نموذجًا بسيطًا، وأكتب المعطيات عليه، ثم أعد أو أحسب. لا يشترط أن يكون الرسم فنيًا؛ المهم أن يوضح العلاقات.

مثال: مقعد زيد في المسرح

يجلس زيد في الصف الخامس من الأمام والثالث من الخلف، وفي المقعد السادس من اليسار والثاني من اليمين.



الصفوف ← ٥ + ٣ − ١ = ٧

المقاعد ← ٦ + ٢ − ١ = ٧

المجموع ← ٧ × ٧ = ٤٩ مقعداً.

طرحت ١؛ لأن صف زيد ومقعده عُدّا مرتين.

أتدرب بنفسي

١ حمزة في الصف الرابع من الأمام والسادس من الخلف؛ ومقعده الثاني من اليسار والسادس من اليمين. كم مقعداً في القسم؟

أتحقق من إجابتي

١) ٩ صفوف × ٧ مقاعد = ٦٣ مقعداً.

! أراجع موضع الطالب في الرسم بعد الحساب؛ للتحقق من صحة العدد في كل اتجاه.

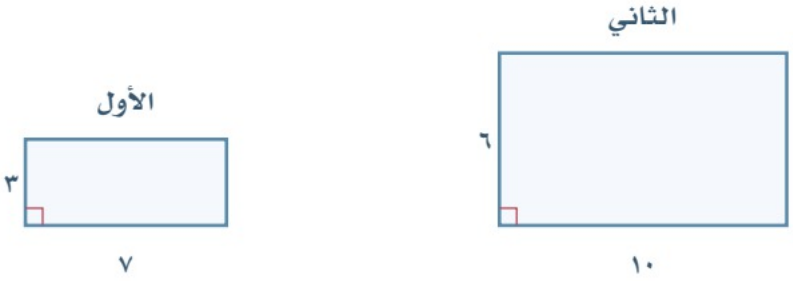
التناسب والتشابه

٦ تشابه المضلعات

أربط الأجزاء المتناظرة

المضلع شكل مغلق من قطع مستقيمة. في المضلعين المتشابهين: الزوايا المتناظرة متطابقة، وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة.

مثال: مستطيلان غير متشابهين



$$\frac{٧}{١٠} = ٠.٧$$

$$\frac{٣}{٦} = ٠.٥$$

كل الزوايا قائمة، لكن نسب الأضلاع المتناظرة مختلفة؛ لذلك المستطيلان غير متشابهين.

أفهم ترتيب حروف التشابه

إذا كان المثلث أ ب جـ يشابه المثلث س ص ع، فإن:

الأول	أ	ب	جـ
نظيره	س	ص	ع

أ ب يناظر س ص، وب جـ يناظر ص ع، وأ جـ يناظر س ع.

أتدرب بنفسي

١ هل مستطيل أبعاده ٦ و٤ يشابه مستطيلاً أبعاده ٩ و٦؟

أتحقق من إجابتي

١) نعم؛ ٩ ÷ ٦ = ٦ ÷ ٤ = ١,٥، والزوايا المتناظرة قائمة.

! تساوي الزوايا وحده لا يكفي للحكم على تشابه مضلعين.

٦ تشابه المضلعات

عامل المقياس والأطوال والمحيط

أحدد اتجاه عامل المقياس بوضوح: طول في الشكل الجديد ÷ الطول المناظر في الشكل الأصلي. أضرب به جميع الأطوال، والمحيط أيضًا.

مثال: أجد طولاً ناقصًا

ضلع في الشكل الأصلي طوله ١٠، ويناظره ١٥ في الشكل الجديد. عامل الانتقال من الأصلي إلى الجديد:

$$\frac{٣}{٢} = \frac{١٥}{١٠}$$

إذا كان ضلع آخر في الأصلي ١٢، فإن نظيره في الجديد:

$$١٢ \times \frac{٣}{٢} = ١٨$$

↓

مثال: المحيط يتغير بالنسبة نفسها

طولا ضلعين متناظرين في مثلثين متشابهين ٢٤ و١٨. محيط المثلث ذي الضلع ٢٤ يساوي ٦٤. ما محيط الآخر؟

$$\frac{٣}{٤} = \frac{١٨}{٢٤}$$

$$٤٨ = \frac{٣}{٤} \times ٦٤$$

المحيط الآخر ٤٨ وحدة.

أتدرب بنفسي

١ مستطيلان متشابهان: الأول ١٠ سم × ٤ سم، وطول الثاني ٥ سم. أوجد محيط الثاني.

٢ محيطا مربعين ٢٨ و٤٢. ما عامل الانتقال من الأول إلى الثاني؟

أتحقق من إجابتي

١) عامل الانتقال نصف؛ عرض الثاني ٢ سم، ومحيطه ١٤ سم.

٢) ٤٢ ÷ ٢٨ = ١,٥.

! عكس اتجاه الانتقال يقلب الكسر. أكتب: «من أي شكل إلى أي شكل؟» قبل التعويض.

٧ التكبير والتصغير

التمدد يكبر الشكل أو يصغره

التمدد ينتج صورة تشابه الشكل الأصلي. مركزه نقطة ثابتة، وعامل المقياس = طول الصورة ÷ طول الشكل الأصلي.

عامل المقياس ك	النتيجة
أكبر من ١	تكبير.
بين ٠ و١	تصغير.
يساوي ١	نفس القياس.

مثال: أضرب البعدين

صورة أصلية ٢٠ سم × ٣٠ سم. عامل تكبيرها خمسة أرباع:

$$٢٠ \times \frac{٥}{٤} = ٢٥$$

$$٣٠ \times \frac{٥}{٤} = ٣٧.٥$$

أبعاد الصورة الجديدة ٢٥ سم × ٣٧,٥ سم.

↓

إذا كان المركز نقطة من الشكل

أرسم أنصاف مستقيمات من المركز إلى الرؤوس، وأحدد كل صورة رأس على شعاعه. في التكبير أضاعف المسافة من المركز؛ وفي التصغير آخذ جزءاً منها. المركز نفسه لا يتحرك.

أتدرب بنفسي

١ مخطط أبعاده ١٥ سم × ١٩,٥ سم؛ صغّرته بعامل ثلث. أوجد البعدين.

٢ ضلع أصلي ٣٥، وصورته ٢١. أوجد عامل التمدد ونوعه.

أتحقق من إجابتي

١) ٥ سم × ٦,٥ سم.

٢) ٢١ ÷ ٣٥ = ٠,٦؛ تصغير.

! أضرب كل بعد في العامل نفسه؛ حتى تبقى الصورة مشابهة للأصل.

التناسب والتشابه

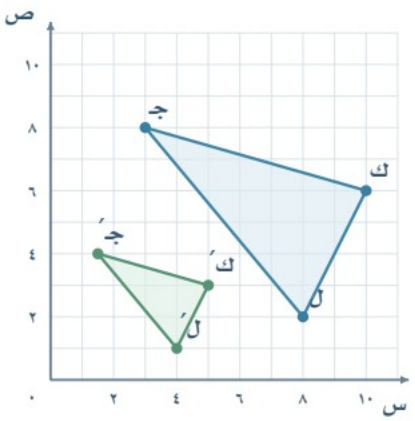
٧ التكبير والتصغير

تمدد مركزه نقطة الأصل

عندما يكون مركز التمدد هو الأصل، أضرب الإحداثيين س وص كليهما في عامل المقياس. الصورة هي (ك × س، ك × ص).

مثال: تصغير مثلث إلى النصف

الرأس	قبل التمدد	بعد التصغير إلى النصف
جـ	(٣ ، ٨)	(١.٥ ، ٤)
ك	(١٠ ، ٦)	(٥ ، ٣)
ل	(٨ ، ٢)	(٤ ، ١)



كل رأس وصورته ونقطة الأصل تقع على استقامة واحدة.

أتدرب بنفسي

١ أوجد صورة (−٢ ، −٤) بتمدد مركزه الأصل وعامله ٣.

٢ أوجد صورة (٣ ، ٦) بتمدد مركزه الأصل وعامله ربع.

أتحقق من إجابتي

١) (−٦ ، −١٢)

٢) (٠.٧٥ ، ١.٥)

! ضرب الإحداثيين في العامل مباشرة صالح هنا لأن مركز التمدد هو نقطة الأصل.



التناسب والتشابه

التكبير والتصغير بالجداول

أطبق العامل نفسه على كل إحداثي

أنظم رؤوس المضلع في جدول. أجعل لس وص عمودين، ثم أضيف عمودين للصورة بعد ضرب كل إحداثي في العامل.

الأصل	الصورة بعد التكبير بعامل ٣
(٢، ٢)	(٦، ٦)
(٢، ٤)	(٦، ١٢)
(٤، ٥)	(١٢، ١٥)
(٦، ٣)	(١٨، ٩)
(٤، ١)	(١٢، ٣)

كيف أستعمل الجدول الإلكتروني؟

إذا كان الإحداثي س في الخلية A3 وص في B3، أكتب في عمودي الصورة:

=A3*3 =B3*3

أنسخ الصيغ إلى بقية الصفوف، ثم أرسم النقاط وأصلها بالترتيب نفسه.

أتدرب بنفسي

١ ما صورة (٥ ، ٤) إذا صغرت المضلع إلى النصف؟

أتحقق من إجابتي

١) (٢.٥ ، ٢)

أتحقق من رأسين على الأقل ومن عامل كل إحداثي، ولا أغير ترتيب الرؤوس عند الرسم.

التناسب والتشابه

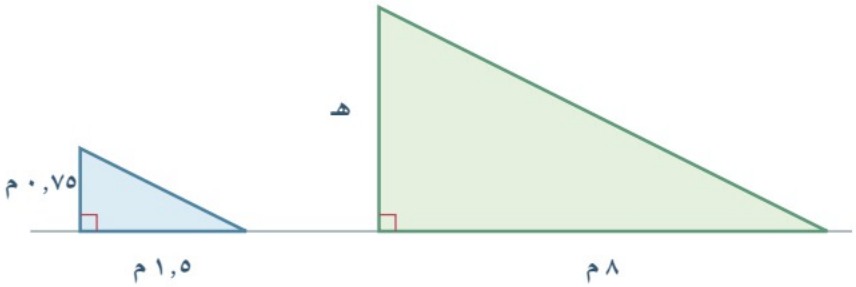
٨ القياس غير المباشر

أستعمل الظل لقياس ارتفاع يصعب الوصول إليه

في الوقت نفسه وعلى أرض مستوية، تكوّن الأجسام الرأسية وظلالها مثلثات متشابهة. أكتب: ارتفاع الجسم ÷ طول ظله = ارتفاع الجسم الآخر ÷ طول ظله.

مثال: ارتفاع مصباح طريق

ارتفاع مضخة ٠,٧٥ م، وطول ظلها ١,٥ م. في الوقت نفسه طول ظل مصباح ٨ م. أجد ارتفاعه هـ.



أرتب ← $\frac{٠.٧٥}{١.٥} = \frac{هـ}{٨}$

أضرب ← ١.٥ × هـ = ٠.٧٥ × ٨ = ٦

أقسم ← هـ = ٦ ÷ ١.٥ = ٤ م.

أتدرب بنفسي

١ طول محمد ١,٨ م وظله ٢,٤ م، وظل عمود ٨ م في الوقت نفسه. ما ارتفاع العمود؟

أتحقق من إجابتي

١) ١,٨ × ٨ ÷ ٢,٤ = ٦ م.

! أقارن ارتفاعاً بارتفاع وظلاً بظل، وأقيس الظلين في الوقت نفسه.

التناسب والتشابه

٨ القياس غير المباشر

القياس غير المباشر بالمثلثات المتشابهة

لا تقتصر الطريقة على الظلال. إذا عرفت أن مثلثين متشابهان، أربط الأضلاع المتناظرة وأحل التناسب.

مثال: طول بحيرة

في مخطط الكتاب: ضلع في مثلث صغير طوله ٣٢٠ م، ويناظره في الكبير ضلع طوله ٣٢٠ + ١٦٢ = ٤٨٢ م. والضلع الآخر في الصغير ٤٠ م ويناظره طول البحيرة ل.

أرتب ← $\frac{\text{ل}}{٤٠} = \frac{٤٨٢}{٣٢٠}$

أحسب ← $\text{ل} = ٤٠ \times \frac{٤٨٢}{٣٢٠} = ٦٠.٢٥$

طول البحيرة ٦٠,٢٥ م. استعملت الضلع الكامل في المثلث الكبير.

↓

أتحقق من المعقولية

المثلث الكبير أكبر من الصغير؛ فيجب أن يكون طول البحيرة أكبر من ٤٠ م. والنتيجة ٦٠,٢٥ تحقق ذلك.

أتدرب بنفسي

١ إشارة ارتفاعها ٢ م وظلها ٣ م، وظل برج ٢١,٣ م في الوقت نفسه. أوجد ارتفاع البرج.

٢ طفل طوله ١,٢٥ م وظله ٢ م، وظل شجرة ٤ م. ما ارتفاع الشجرة؟

أتحقق من إجابتي

١) ٢ × ٢١,٣ ÷ ٣ = ١٤,٢ م.

٢) ٢,٥ م.

! أميز بين طول جزء من ضلع وطول الضلع كله قبل كتابة التناسب.



التناسب والتشابه

مراجعة الفصل الثالث

التناسب ومعدل التغير

أراجع الفرق

المطلوب	الاختبار
هل العلاقة متناسبة؟	أختبر ثبات النسبة.
هل العلاقة خطية؟	أختبر ثبات معدل التغير.
حل التناسب	أرتب الكميات ثم أستعمل الضرب التبادلي.

أختبر فهمي

١ سعر لعبة ٧,٥ ريالات. كم ثمن ١٠ ألعاب؟

٢ أجور ١٥، ٣٠، ٤٥، ٦٠ ريالاً مقابل ١، ٢، ٣، ٤ ساعات. هل العلاقة خطية متناسبة؟

٣ ٤ أكواب طحين لكل ٢,٥ كوب ماء. ما الماء اللازم لـ٢٤ كوب طحين؟

٤ تغير سعر سيارة من ١٠٠ إلى ٨٥ إلى ٧٠ ألف ريال خلال أعمار ١، ٢، ٣ سنوات. ما معدل التغير؟

٥ حل $\frac{س}{٣٦} = \frac{١٥}{٢٤}$.

أتحقق من إجابتي

١) ٧٥ ريالاً.

٢) نعم؛ المعدل والنسبة يساويان ١٥ ريالاً للساعة.

٣) ١٥ كوباً.

٤) −١٥ ألف ريال كل سنة.

٥) س = ٢٢,٥.

! أراجع ترتيب الكميتين ووحدة المعدل، ولا أخلط النسبة بمعدل التغير.

التناسب والتشابه

مراجعة الفصل الثالث

التشابه والتمدد والقياس غير المباشر

أحدد الشكل الأصلي والصورة، ثم أتتبع العناصر المتناظرة وأكتب النسبة باتجاه واضح.

أراجع وأطبق

١ عامل الانتقال من مثلث إلى آخر ثلاثة أرباع، ومحيط الأول ٦٤. ما محيط الآخر؟

٢ ضلع أصلي ٦، وصورته ١٠. ما عامل التمدد؟

٣ أوجد صورة (١ ، ١) بتمدد مركزه الأصل وعامله ٢.

٤ صورة أصلية ١٥ سم × ١٠ سم؛ صغرت بعامل ثلاثة أعشار. ما أبعادها؟

٥ طول أحمد ١,٨ م وظله ٦ م. طول ظل الشجرة كاملاً ٢٠ م. ما ارتفاعها؟

أتحقق من إجابتي

١) ٤٨ وحدة.

٢) خمسة أثلاث؛ تكبير.

٣) (٢ ، ٢)

٤) ٤,٥ سم × ٣ سم.

٥) ١,٨ × ٢٠ ÷ ٦ = ٦ م.

! أتحقق من أن التكبير يزيد الأطوال، والتصغير ينقصها، وأن النتيجة توافق اتجاه عامل المقياس.

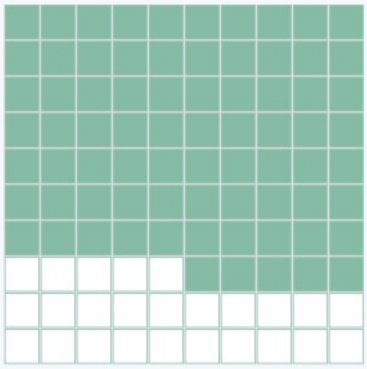
النسبة المئوية

الفصل الرابع

شرح مختصر • أمثلة بخطوات • تدريب ومراجعة

الفصل الرابع

النسبة المئوية



$$\frac{٣}{٤} = ٧٥٪$$

ماذا سأتعلم؟

- أحسب النسب المئوية ذهنيًا، وأقدّرها بأعداد سهلة.
- أوجد الجزء والكل والنسبة المئوية بمعادلة واضحة.
- أحسب التغير المئوي والربح والخصم، وأراجع معقولية الجواب.

أقرأ القاعدة، وأتبع المثال، ثم أحل التدريب وأتحقق من الحساب والإشارة والوحدة.

النسبة المئوية

١ إيجاد النسب المئوية ذهنياً

أربط النسبة بكسر أعرفه

النسبة المئوية تعني جزءاً من مئة. أستعمل كسراً مكافئاً يسهل الحساب الذهني، ثم أضربه في العدد.

النسبة	الكسر المكافئ	طريقة سريعة
٪٥٠	$\frac{١}{٢}$	النصف.
٪٢٥	$\frac{١}{٤}$	الربع.
٪٧٥	$\frac{٣}{٤}$	ثلاثة أرباع.
٪٢٠	$\frac{١}{٥}$	الخمس.
٪١٢.٥	$\frac{١}{٨}$	الثمن.

مثال: ٢٠٪ من ٤٥

$$٪٢٠ \times ٤٥ = \frac{١}{٥} \times ٤٥ = ٩$$

كذلك ٣٣ وثلث٪ تساوي ثلثاً؛ وثلث ٩٣ يساوي ٣١.

أتدرب بنفسي

١ احسب ١٢,٥٪ من ١٦٠.

أتحقق من إجابتي

١) ثمن ١٦٠ يساوي ٢٠.

! ٣٣ وثلث٪ تساوي ثلثاً تماماً. أما ٣٣,٣٪ فهي قيمة عشرية مقربة.

النسبة المئوية

١ إيجاد النسب المئوية ذهنياً

أستعمل ١٠٪ و١٪ لبناء نسب أخرى

١٠٪ تساوي ٠,١، و١٪ تساوي ٠,٠١. أستطيع إيجاد ٣٪ بضرب قيمة ١٪ في ٣، أو إيجاد ٨٠٪ بضرب قيمة ١٠٪ في ٨.

مثال: عشر العدد وجزء من مئة

$$١٠٪ \times ٩٨ = ٩.٨$$

$$١٪ \times ٢٣٥ = ٢.٣٥$$

لإيجاد ١٠٪ أحرك الفاصلة منزلة إلى اليسار، ولإيجاد ١٪ أحركها منزلتين.

↓

مثال: عدد المباريات

فاز فريق في ٨٠٪ من ٢٠ مباراة. أجد عُشر ٢٠، ثم أضرب في ٨:

$$٢٠ \times ٠.١ = ٢$$

$$٢ \times ٨ = ١٦$$

فاز في ١٦ مباراة.

أتدرب بنفسي

١ احسب ٣٪ من ٢٢.

٢ احسب ١٪ من ٤٥٠.

٣ نما ٧٥٪ من ٢٨٠ شتلة. كم شتلة نمت؟

أتحقق من إجابتي

١) ١٪ = ٠,٢٢، ثم ٠,٢٢ × ٣ = ٠,٦٦.

٢) ٤,٥.

٣) ثلاثة أرباع ٢٨٠ = ٢١٠ شتلات.

أتحقق من موضع الفاصلة. ١٪ من عدد موجب أصغر بكثير من ١٠٪ منه.

النسبة المئوية

٢ النسبة المئوية والتقدير

أختار أعداداً قريبة يسهل حسابها

التقدير يعطيني جواباً قريباً. الأعداد المتناغمة أعداد يسهل إجراء الحساب عليها ذهنياً. أكتب ما قربته حتى تكون طريقتي واضحة.

مثال: ١٩٪ من ٣٠

أقرب ١٩٪ إلى ٢٠٪، وأبقي ٣٠ لأنه يقبل القسمة على ٥:

$$\frac{١}{٥} \times ٣٠ = ٦$$

إذن ١٩٪ من ٣٠ تساوي نحو ٦. القيمة الدقيقة ٥,٧؛ فالتقدير قريب.

↓

مثال: ٢٥٪ من ٤١

أقرب ٤١ إلى ٤٠، وآخذ ربعه:

$$٤٠ \div ٤ = ١٠$$

التقدير ١٠، والقيمة الدقيقة ١٠,٢٥.

مثال: ٦٥٪ من ٧٦

أقرب ٦٥٪ إلى ثلثين، و٧٦ إلى ٧٥:

$$\frac{٢}{٣} \times ٧٥ = ٥٠$$

التقدير نحو ٥٠.

أتدرب بنفسي

١ قدّر ٤٩٪ من ١٦٠.

٢ قدّر ٤١٪ من ٣٩.

أتحقق من إجابتي

١) أستعمل ٥٠٪: نصف ١٦٠ = ٨٠.

٢) أستعمل ٤٠٪ من ٤٠ = ١٦.

! أميز بين الجواب الدقيق والتقدير، ولا أكتب علامة المساواة بين قيمتين مختلفتين.

النسبة المئوية

٢ النسبة المئوية والتقدير

أقدّر النسبة المئوية للجزء من الكل

أكتب الجزء ÷ الكل، ثم أختار كسراً قريباً أعرف نسبته المئوية. قد توجد أكثر من طريقة صحيحة للتقدير.

مثال: ٨ من ٢٥

أقرب المقام إلى ٢٤؛ لأن ٨ ثلث ٢٤:

$$\frac{١}{٣} = \frac{٨}{٢٤}$$

إذن ٨ من ٢٥ تساوي نحو ٣٣ وثلث٪. والقيمة الدقيقة ٣٢٪.

مثال: ١٤ من ٢٥

أقرب ١٤ إلى ١٥:

$$\frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣}{٥} = ٦٠٪$$

أقدّر النسبة بنحو ٦٠٪.

↓

مثال: ٨٩ من ١٢١

أقرب إلى ٩٠ من ١٢٠:

$$\frac{٩٠}{١٢٠} = \frac{٣}{٤} = ٧٥٪$$

النسبة نحو ٧٥٪.

أتدرب بنفسي

١ قدّر النسبة المئوية لـ٨ من ٧٩.

٢ قدّر النسبة المئوية لـ١٤ من ١٩.

أتحقق من إجابتي

١) أستعمل ٨ من ٨٠؛ فتساوي نحو ١٠٪.

٢) أستعمل ١٥ من ٢٠؛ فتساوي نحو ٧٥٪.

! أحافظ على معنى الكسر: الجزء في البسط والكل في المقام.

www.haqibati.net

النسبة المئوية

٣ استراتيجية حل المسألة: التحقق من معقولية الإجابة

أتحقق من المعقولية قبل الحساب وبعده

أقارن بالربع أو النصف أو الواحد الصحيح، وأستعمل تقديراً سريعاً. إذا خالفت الإجابة هذا التقدير، أراجع العملية والفاصلة.

مثال: هل التبرع ٨٠٠ ريال معقول؟

ادخر أخو ريان ١٥٥٠ ريالاً، ويريد التبرع بـ٤٠٪ منه. قيل إن تبرعه ٨٠٠ ريال.

أقارن ← ١٥٥٠ ÷ ٢ = ٧٧٥ ريالاً؛ وهو نصف المبلغ.

أحكم ← ٤٠٪ أقل من ٥٠٪؛ فالتبرع أقل من ٧٧٥. إذن ٨٠٠ غير معقول.

أحسب ← ٠.٤ × ١٥٥٠ = ٦٢٠ ريالاً.

↓

كيف تساعدني المقارنة؟

إذا كانت النسبة أقل من ١٠٠٪، فالجزء أقل من الكل الموجب. وإذا تجاوزت ١٠٠٪، فالجزء أكبر من الكل.

أتدرب بنفسي

١ سعر كتب ١٢٩ ريالاً، وتباع بـ٧٥٪ من السعر. أي تقدير أقرب: ٣٠، ٦٠، ٩٠؟

٢ يتقاضى بدر ٣٠ ريالاً للساعة. هل ٢٠ أم ٣٠ أم ٤٠ ساعة تكفي لادخار ١١٦٠ ريالاً؟

أتحقق من إجابتي

١) ٩٠ ريالاً؛ فثلاثة أرباع ١٢٠ = ٩٠، والقيمة الدقيقة ٩٦,٧٥.

٢) ٤٠ ساعة؛ لأنها تعطي ١٢٠٠ ريال. ٣٠ ساعة تعطي ٩٠٠ فقط.

! التحقق من المعقولية لا يغني عن الحساب المطلوب، لكنه يكشف الإجابات البعيدة.

النسبة المئوية

٤ الجبر: المعادلة المئوية

إيجاد الجزء: أضرب النسبة في الكل

المعادلة المئوية: **الجزء** = **النسبة بصورتها العشرية** × **الكل**. أحدد المجهول قبل اختيار العملية.

مثال: ٦٪ من ٥٢٥

أحدد ← الكل ٥٢٥، والنسبة ٦٪، والجزء هو المطلوب.

أحول ← ٦٪ = ٠.٠٦

أضرب ← ٠.٠٦ × ٥٢٥ = ٣١.٥

أتحقق ← ٦٪ من ٥٠٠ = ٣٠؛ والنتيجة ٣١,٥ قريبة منها.

↓

ثلاثة أسئلة أسألها لنفسي

الكل	الجزء	النسبة
الكمية الكاملة التي أقارن بها.	الكمية المأخوذة من الكل.	كم من كل مئة؟

أتدرب بنفسي

١ أوجد ٣٥٪ من ٨٨.

٢ أوجد ٨٥٪ من ٩٢٠.

أتحقق من إجابتي

١) ٠,٣٥ × ٨٨ = ٣٠,٨.

٢) ٧٨٢.

! أقسم النسبة المئوية على ١٠٠ قبل استعمالها في المعادلة: ٦٪ = ٠,٠٦.

النسبة المئوية

٤ الجبر: المعادلة المئوية

إيجاد النسبة أو الكل: أستعمل القسمة

إذا كان الجزء والكل معلومين، أقسم الجزء على الكل ثم أحوله إلى نسبة مئوية. وإذا كان الجزء والنسبة معلومين، أقسم الجزء على النسبة العشرية.

مثال: ما نسبة ٤٢٠ من ٦٠٠؟

٤٢٠ ÷ ٦٠٠ = ٠.٧ = ٧٠٪

النسبة ٧٠٪؛ لأن ٠,٧ تعني ٧٠ من كل مئة.

مثال: ما العدد الذي ٥٢٪ منه تساوي ٦٥؟

أكتب ← ٠.٥٢ × ك = ٦٥

أقسم ← ك = ٦٥ ÷ ٠.٥٢ = ١٢٥

أتحقق ← ٠.٥٢ × ١٢٥ = ٦٥

حقيبتي
www.haqibati.net

أتدرب بنفسي

١ ما النسبة المئوية للعدد ٢٥ من ٦٢٥؟

٢ ما العدد الذي ٧٥٪ منه تساوي ٢١٠؟

٣ ما النسبة المئوية للعدد ٦ من ٧٥٠؟

أتحقق من إجابتي

١) ٢٥ ÷ ٦٢٥ = ٠,٠٤ = ٤٪.

٢) ٢١٠ ÷ ٠,٧٥ = ٢٨٠.

٣) ٠,٨٪؛ وليست ٨٠٪.

أتحقق من نوع الجواب: إذا طلب النسبة، أحول الكسر العشري إلى نسبة مئوية.

النسبة المئوية

٤ الجبر: المعادلة المئوية

أطبق المعادلة على الربح والخسارة

الربح يضاف إلى ثمن الشراء، والخسارة تطرح منه. أميز بين مقدار الربح أو الخسارة وبين ثمن البيع النهائي.

مثال: جهاز ثمن شرائه ٢٤٤ ريالاً وربحه ٦٪

الربح ← ٢٤٤ × ٠.٠٦ = ١٤.٦٤ ريالاً.

البيع ← ٢٤٤ + ١٤.٦٤ = ٢٥٨.٦٤ ريالاً.

طريقة أخرى ← ٢٤٤ × ١.٠٦ = ٢٥٨.٦٤

١,٠٦ تعني ١٠٠٪ من ثمن الشراء مضافًا إليها ٦٪.

↓

مثال: خسارة ٥٪

ثمن شراء أثاث ٢٥٠٠ ريال. إذا بيع بخسارة ٥٪، فالمتبقي من الثمن ٩٥٪:

٢٥٠٠ × ٠.٩٥ = ٢٣٧٥

ثمن البيع ٢٣٧٥ ريالاً.

أتدرب بنفسي

١ اشترت هند عقداً بـ١٢٢٥ ريالاً، وباعته بربح ٧٪. ما ثمن البيع؟

٢ ثمن غسالة بعد خصم ٨٪ هو ١٣٨٠ ريالاً. ما ثمنها قبل الخصم؟

أتحقق من إجابتي

١) ١٢٢٥ × ١,٠٧ = ١٣١٠,٧٥ ريالاً.

٢) ١٣٨٠ يمثل ٩٢٪ من الأصل؛ الأصل = ١٣٨٠ ÷ ٠,٩٢ = ١٥٠٠ ريال.

! إذا كان السعر بعد الخصم معلومًا، أقسم على النسبة المتبقية؛ ولا أضيف إليه نسبة الخصم.

النسبة المئوية

٥ التغير المئوي

التغير المئوي يقارن بالكمية الأصلية

أجد مقدار الفرق بين الجديد والأصلي، ثم أقسمه على الأصلي وأحوله إلى نسبة مئوية. أسميه زيادة إذا كبر العدد، ونقصاناً إذا صغر.

الخطوات باختصار

١) مقدار التغير = الفرق الموجب بين القيمتين.

٢) النسبة = مقدار التغير ÷ الكمية الأصلية.

٣) أحول إلى نسبة مئوية، وأذكر زيادة أو نقصاناً.

مثال: من ١٧٤ كتاباً إلى ٢٠٠ كتاب

$$٢٠٠ - ١٧٤ = ٢٦$$

٢٦ ÷ ١٧٤ × ١٠٠ ≈ ١٤,٩٪. إذن التغير زيادة مئوية بنحو ١٤,٩٪.

↓

مثال: من ٨٠ ريالاً إلى ٦٤ ريالاً

$$٨٠ - ٦٤ = ١٦$$

$$\frac{١٦}{٨٠} = ٠.٢ = ٢٠٪$$

التغير نقصان مقداره ٢٠٪.

أتدرب بنفسي

١ ارتفع الثمن من ٢٠ إلى ٢٥ ريالاً. ما الزيادة المئوية؟

٢ نقص الارتفاع من ١٥ م إلى ٦ م. ما النقصان المئوي؟

أتحقق من إجابتي

١) ٥ ÷ ٢٠ × ١٠٠ = ٢٥٪؛ المقام هو السعر الأصلي ٢٠.

٢) ٩ ÷ ١٥ × ١٠٠ = ٦٠٪.

! أقسم على القيمة الأصلية دائماً في حساب نسبة التغير.

النسبة المئوية

٥ التغير المئوي

ثمن البيع بعد زيادة أو خصم

للزيادة: أضرب الأصل في (١ + النسبة العشرية). وللخصم: أضرب الأصل في (١ − النسبة العشرية).

مثال: ربح ٥٥٪

ثمن شراء طاولة ٤٢٠ ريالاً؛ ونسبة ربحها ٥٥٪. النسبة المدفوعة = ١٥٥٪:

$$٤٢٠ \times ١.٥٥ = ٦٥١$$

ثمن البيع ٦٥١ ريالاً.

↓

مثال: خصم ٢٠٪

ثمن برنامج ٦٠ ريالاً. قيمة الخصم:

$$٦٠ \times ٠.٢ = ١٢$$

الثمن بعد الخصم:

$$٦٠ - ١٢ = ٤٨$$

ويمكن إيجاده مباشرة:

$$٦٠ \times ٠.٨ = ٤٨$$

أتدرب بنفسي

١ حقيبة ثمن شرائها ٢٥ ريالاً، وربحها ٣٠٪. أوجد ثمن البيع.

٢ دراجة سعرها ٤٩٠ ريالاً؛ خصمها ٤٠٪. أوجد الثمن الجديد.

أتحقق من إجابتي

١) ٣٢,٥ ريالاً.

٢) ٢٩٤ ريالاً.

تلميح: قيمة الخصم جزء من السعر. أما ما أدفعه فهو السعر الأصلي ناقص ذلك الجزء.

النسبة المئوية

٥ التغير المئوي

التغيرات المتتالية: لكل خطوة أساسها

إذا حدث خصمان أو زيادة ثم خصم، أطبق التغير الثاني على السعر الناتج من الأول. لا أجمع النسب تلقائيًا.

مثال: خصمان متتاليان

سعر غسالة ٢٣٥٠ ريالاً؛ خصم أول ٣٠٪، ثم خصم إضافي ٢٠٪ من السعر الجديد:

الأول ← ٢٣٥٠ × ٠.٧ = ١٦٤٥

الثاني ← ١٦٤٥ × ٠.٨ = ١٣١٦

ثمنها النهائي ١٣١٦ ريالاً. الخصم الكلي ٤٤٪؛ لأن المدفوع ٥٦٪ من الأصل.

↓

مثال: زيادة ٢٠٪ ثم خصم ٢٠٪

أفترض سعراً أصلياً ١٠٠ ريال:

١٠٠ × ١.٢ = ١٢٠

١٢٠ × ٠.٨ = ٩٦

لم يرجع إلى ١٠٠؛ لأن الخصم الثاني حسب من ١٢٠.

أتدرب بنفسي

١ جهاز سعره ٢٠٠٠ ريال؛ خصم ٢٥٪، ثم شحن ٦٪ من السعر بعد الخصم. اقتسمه شخصان بالتساوي. كم يدفع كل واحد؟

٢ تذكرة طفل بعد خصم ٢٠٪ تساوي ٨ ريالات. ما السعر الأصلي؟

أتحقق من إجابتي

١) ٢٠٠٠ × ٠,٧٥ × ١,٠٦ ÷ ٢ = ٧٩٥ ريالاً.

٢) ٨ ÷ ٠,٨ = ١٠ ريالات.

! أكتب بجانب كل نسبة: من أي مبلغ حُسبت؟ هذا يضبط التغيرات المتتالية.

النسبة المئوية

مراجعة الفصل الرابع

الحساب الذهني والمعادلة المئوية

أحدد المجهول

المطلوب	العملية
الجزء	النسبة العشرية × الكل.
النسبة	الجزء ÷ الكل، ثم التحويل إلى ٪.
الكل	الجزء ÷ النسبة العشرية.

أختبر فهمي

١ احسب ٣٠٪ من ٦٠.

٢ احسب ١٪ من ٩٩.

٣ احسب ٦٢,٥٪ من ٤٨.

٤ أوجد النسبة المئوية للعدد ٦ من ٢٥.

٥ أوجد العدد الذي ٣٠٪ منه تساوي ٧٥.

٦ قدّر ٢٣٪ من ١٦.

أتحقق من إجابتي

١) ١٨.

٢) ٠,٩٩.

٣) خمسة أثمان ٤٨ تساوي ٣٠.

٤) ٢٤٪.

٥) ٢٥٠.

٦) أستعمل الربع: ٢٥٪ من ١٦ = ٤.

! أضع علامة ٪ مع جواب النسبة، وأضع الوحدة المناسبة مع جواب الكمية.

النسبة المئوية

مراجعة الفصل الرابع

التغير المئوي وثمن البيع

أكتب الأصل أولاً؛ فهو أساس حساب نسبة التغير. وأميز بين مبلغ الزيادة أو الخصم والثمن النهائي.

أراجع وأطبق

١ نقص العدد من ١٥ قلماً إلى ١٢ قلماً. أوجد التغير المئوي.

٢ زاد العدد من ٤٠ سيارة إلى ٥٥ سيارة. أوجد التغير المئوي.

٣ قميص ثمن شرائه ٢٥ ريالاً، وربحه ٤٥٪. أوجد ثمن بيعه.

٤ هاتف سعره ٣٩٩ ريالاً، وخصمه ١٥٪. أوجد ثمنه بعد الخصم.

٥ لوح تزلج سعره ٢٠٠ ريال، وخصمه ٣٥٪. أوجد ثمنه الجديد.

٦ زاد عرض مسار من ٥٠ م إلى ٦٠ م. أوجد الزيادة المئوية.

أتحقق من إجابتي

١) نقصان ٢٠٪.

٢) زيادة ٣٧,٥٪.

٣) ٣٦,٢٥ ريالاً.

٤) ٣٣٩,١٥ ريالاً.

٥) ١٣٠ ريالاً.

٦) ٢٠٪.

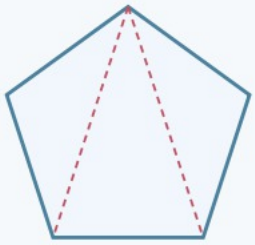
أراجع الفاصلة العشرية، والقيمة الأصلية في المقام، وأؤخر التقريب إلى آخر الحساب.

الفصل الخامس

شرح مختصر • أمثلة بخطوات • تدريب ومراجعة

الفصل الخامس

الهندسة والاستدلال المكاني



٣ مثلثات

$$٣ \times ١٨٠^{\circ} = ٥٤٠^{\circ}$$

ماذا سأتعلم؟

- أستعمل علاقات الزوايا، وأحسب زوايا المضلعات.
- أحدد التطابق والتماثل من الأجزاء المتناظرة.
- أرسم الانعكاس والانسحاب والدوران، وأكتب إحداثيات الصورة.

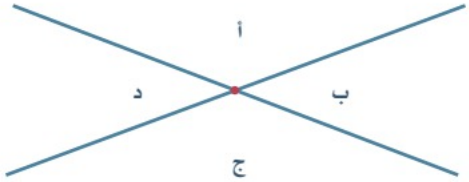
أقرأ القاعدة، وأتبع المثال، ثم أحل التدريب وأتحقق من الحساب والإشارة والوحدة.

١ علاقات الزوايا والمستقيمات

أميز بين الزوايا المتساوية والزوايا ذات المجموع

أبدأ بتحديد العلاقة؛ فبعض العلاقات تعطيني تساوي الزاويتين، وبعضها يعطيني مجموعهما.

العلاقة	ماذا تعني؟
متقابلتان بالرأس	تنتجان عن تقاطع مستقيمين، وتقعان متقابلتين؛ وهما متساويتان.
متتامتان	مجموع قياسيهما ٩٠°.
متكاملتان	مجموع قياسيهما ١٨٠°.



في الرسم: أ وج متقابلتان بالرأس، وكذلك ب ود. وكل زاويتين متجاورتين على مستقيم مجموعهما ١٨٠°.

مثال: زاويتان متتامتان، إحداهما ٦٥°

$$٩٠^\circ - ٦٥^\circ = ٢٥^\circ$$

قياس الزاوية الأخرى ٢٥°.

أتدرب بنفسي

١ زاويتان متكاملتان؛ قياس إحداهما ١٣٥°. أوجد الأخرى.

٢ قياس زاوية ٧٧°. ما قياس الزاوية المقابلة لها بالرأس؟

أتحقق من إجابتي

١) $١٨٠^\circ - ١٣٥^\circ = ٤٥^\circ$.

٢) ٧٧°؛ لأن المتقابلتين بالرأس متساويتان.

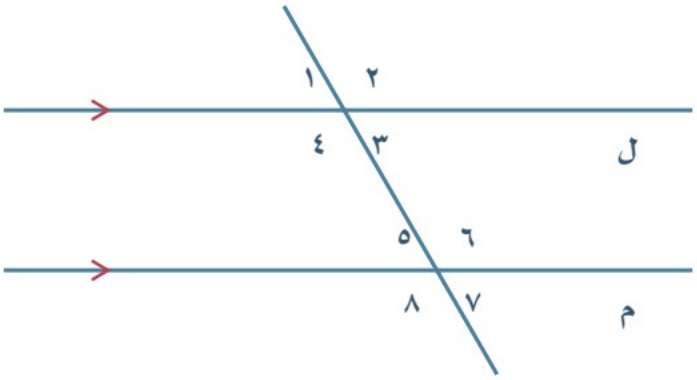
المتتامتان أو المتكاملتان لا يشترط أن تكونا متجاورتين. أما الزاويتان على خط مستقيم فهما متكاملتان.

الهندسة والاستدلال المكاني

١ علاقات الزوايا والمستقيمات

أحدد موضع الزوايا عند وجود قاطع

المستقيمان المتوازيان في المستوى لا يتقاطعان. والمتعامدان يتقاطعان بزاوية قائمة. والقاطع مستقيم يقطع مستقيمين أو أكثر في نقاط مختلفة.



ل وم متوازيان. الأرقام في هذا الرسم تحدد مواضع الزوايا؛ والرسم تخطيطي.

النوع	كيف أتعرف عليه؟	مثال من الرسم
داخلية	بين المستقيمين ل وم.	٣، ٤، ٥، ٦
خارجية	خارج المنطقة بين المستقيمين.	١، ٢، ٧، ٨
متناظرة	في الموضع نفسه عند التقاطعين.	١ مع ٥؛ أو ٢ مع ٦
متبادلة داخليًا	داخلية وعلى جهتين مختلفتين من القاطع.	٤ مع ٦؛ أو ٣ مع ٥
متبادلة خارجيًا	خارجية وعلى جهتين مختلفتين من القاطع.	١ مع ٧؛ أو ٢ مع ٨

كيف أصف الزوج؟

الموضع ← هل الزاويتان داخل المستقيمين أم خارجهما؟

الجهة ← هل تقعان على جهتين مختلفتين من القاطع؟

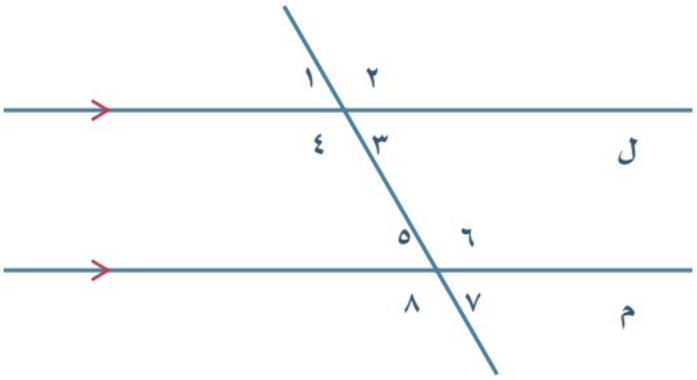
التناظر ← إذا كان موضعهما عند التقاطعين نفسه، فهما متناظرتان.

أرجع إلى ترقيم الرسم نفسه؛ فقد يتغير ترقيم الزوايا من سؤال إلى آخر.

١ علاقات الزوايا والمستقيمات

إذا كان المستقيمان متوازيين أستعمل هذه العلاقات

عند قطع مستقيمين متوازيين بقاطع: المتناظرتان متساويتان، والمتبادلتان داخلياً متساويتان، والمتبادلتان خارجياً متساويتان.



مثال وفق الرسم: قياس الزاوية ١ يساوي ٦٥°

تناظر ← الزاوية ٥ = ٦٥° ؛ لأنها تناظر الزاوية ١.

تبادل ← الزاوية ٧ = ٦٥° ؛ لأنها متبادلة خارجياً مع الزاوية ١.

تكامل ← ١٨٠° − ٦٥° = ١١٥° ؛ إذن الزاوية ٢ = ١١٥°.

مثال جبري

زاويتان متناظرتان بين مستقيمين متوازيين: قياس الأولى ٤٥°، والثانية (س + ٢٥)°. إذن:

س + ٢٥ = ٤٥

س = ٤٥ − ٢٥ = ٢٠

أتدرب بنفسي

١ زاويتان متبادلتان داخلياً بين متوازيين، قياساهما ٨٠° و(٢س)°. أوجد س.

أتحقق من إجابتي

١) ٢س = ٨٠؛ إذن س = ٤٠.

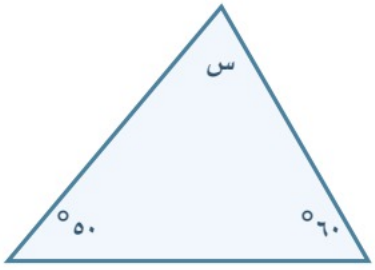
! الزاويتان الداخليتان على الجهة نفسها من القاطع مجموعهما ١٨٠° إذا كان المستقيمان متوازيين.

الهندسة والاستدلال المكاني

توسع: المثلثات

أفهم سبب مجموع زوايا المثلث

مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي ١٨٠°. أستطيع رؤية ذلك عند ترتيب زواياه الثلاث لتكوين زاوية مستقيمة.



مثال: زاويتان ٥٠° و٦٠°

$$\text{س}^\circ = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$$

قياس الزاوية الثالثة ٧٠°.

المثلث القائم

زاويته القائمة ٩٠°؛ إذن مجموع الزاويتين الحادتين فيه ٩٠°:

$$\text{س}^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

أتدرب بنفسي

١ في مثلث زاويتان قياساهما ٧٣° و٦١°. أوجد الثالثة.

٢ في مثلث قائم زاوية حادة ٣٥°. أوجد الزاوية الحادة الأخرى.

أتحقق من إجابتي

١) ٤٦°.

٢) ٥٥°.

إذا تساوت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، تساوت الزاويتان الباقيتان؛ والمثلثان متشابهان.

٢ استراتيجية حل المسألة: التبرير المنطقي

أربط الاستنتاج بحقيقة أعرفها

التبرير المنطقي يعني الاستفادة من المعطيات والحقائق للوصول إلى نتيجة لها سبب واضح. أكتب السبب مع كل خطوة.

مثال: ما مجموع الزاويتين الحادتين في مثلث قائم؟

المعطيات ← المثلث قائم؛ أي فيه زاوية قياسها ٩٠°.

الحقيقة ← مجموع زوايا المثلث ١٨٠°.

الاستنتاج ← ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠° ؛ إذن الزاويتان الحادتان متتامتان.

التحقق ← مثلاً: ٣٥° + ٥٥° = ٩٠°، وكذلك ٤٥° + ٤٥° = ٩٠°.

↓

مثال: أستفيد من نمط الكسور

$$\frac{١}{١١} = ٠.\overline{٠٩}$$

$$\frac{٤}{١١} = ٠.\overline{٣٦}$$

ألاحظ أن ضرب ٩ في البسط يعطي العدد الدوري المكوّن من رقمين في هذه الأمثلة. أتحقق بالقسمة عند الحاجة.

أتدرب بنفسي

١ اكتب $\frac{٦}{١١}$ في صورة كسر عشري دوري.

٢ زاوية حادة في مثلث قائم ٥٠°. أوجد الأخرى مع السبب.

أتحقق من إجابتي

١) ٠,٥٤ مع تكرار ٥٤؛ لأن ٦ ÷ ١١ = ٠,٥٤٥٤... .

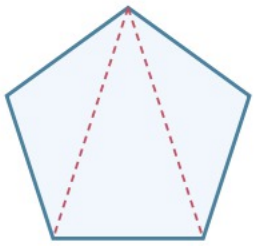
٢) ٤٠° ؛ لأن مجموع الحادتين ٩٠°.

! الأمثلة تساعدني على التخمين؛ وأوضح سبب صحة الاستنتاج اعتماداً على حقيقة أو قاعدة.

٣ المضلعات والزوايا

أجد مجموع الزوايا الداخلية

الزاوية الداخلية تقع داخل المضلع بين ضلعين متجاورين. أصل رأسًا واحدًا بالرؤوس غير المجاورة؛ فينقسم المضلع المحدب ذو ن أضلاع إلى (ن − ٢) مثلثًا.



٣ مثلثات

القاعدة

$$\text{المجموع} = (\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ$$

ن تمثل عدد أضلاع المضلع. الخماسي ينقسم إلى ٣ مثلثات؛ فمجموع زواياه ٥٤٠°.

مثال: مضلع عشاري

$$١٠ - ٢ = ٨$$

$$٨ \times ١٨٠^\circ = ١٤٤٠^\circ$$

أتدرب بنفسي

١ أوجد مجموع زوايا مضلع سداسي.

٢ أوجد مجموع زوايا مضلع له ١٥ ضلعًا.

أتحقق من إجابتي

١) $(٦ - ٢) \times ١٨٠^\circ = ٧٢٠^\circ$.

٢) ٢٣٤٠°.

! هذه القاعدة تعطي المجموع؛ ولإيجاد زاوية واحدة أحتاج معلومات إضافية.

٣ المضلعات والزوايا

المضلع المنتظم: الأضلاع والزوايا متساوية

المضلع المنتظم جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه متطابقة. لذلك أقسم مجموع زواياه الداخلية على عدد زواياه.

القاعدة

قياس كل زاوية داخلية في مضلع منتظم = مجموع الزوايا ÷ عدد الأضلاع.

$$\text{قياس الزاوية} = \frac{(\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ}{\text{ن}}$$

مثال: المثمن المنتظم

أحسب عدد المثلثات: ٨ − ٢ = ٦، ثم أضرب:

$$٦ \times ١٨٠^\circ = ١٠٨٠^\circ$$

$$١٠٨٠^\circ \div ٨ = ١٣٥^\circ$$

المضلع المنتظم	قياس كل زاوية
مثلث	٦٠°
مربع	٩٠°
خماسي	١٠٨°
سداسي	١٢٠°

أربط بالتبليط

عند التقاء البلاطات حول نقطة، مجموع الزوايا ٣٦٠°. مثمنان منتظمان ومربع يعطون:

$$١٣٥^\circ + ١٣٥^\circ + ٩٠^\circ = ٣٦٠^\circ$$

أتدرب بنفسي

١ أوجد قياس كل زاوية في سباعي منتظم إلى أقرب عُشر.

أتحقق من إجابتي

١) نحو $١٢٨,٦^\circ$.

لا أقسم المجموع على عدد الأضلاع لإيجاد زاوية بعينها إلا إذا كانت الزوايا كلها متساوية.

٤ تطابق المضلعات

التطابق: الشكل والقياس نفسيهما

المضلعان المتطابقان لهما الشكل والقياس نفسيهما. أضلاعهما المتناظرة متطابقة، وزواياهما المتناظرة متطابقة، حتى لو تغير اتجاه الرسم.



أقرأ ترتيب الرؤوس

إذا كتبنا: △ أ ب ج ≅ △ ك ر ن، فالتناظر هو:

الأول	الثاني
أ	ك
ب	ر
ج	ن

إذن أ ب يناظر ك ر، وب ج يناظر ر ن، وأ ج يناظر ك ن.

↓

مثال

إذا كان قياس أ = ٤٠°، وطول ب ج = ٩ سم، فإن قياس ك = ٤٠°، وطول ر ن = ٩ سم.

أتدرب بنفسي

١ في المثلثين السابقين: قياس ر = ٦٥°. أوجد قياس ن.

أتحقق من إجابتي

١) ١٨٠° − ٤٠° − ٦٥° = ٧٥°.

! أحدد التناظر من ترتيب الحروف وعلامات التطابق؛ ولا أعتمد على مكان الشكل في الصفحة.

٤ تطابق المضلعات

أستعمل التطابق لإيجاد القياسات الناقصة

أكتب الأزواج المتناظرة أولاً، ثم أنقل القياس من الضلع أو الزاوية المطابقة. وإذا احتجت زاوية ثالثة في مثلث أستعمل المجموع ١٨٠°.

مثال: △ س ص ع ≅ △ ل ك م

التناظر ← س ↔ ل، ص ↔ ك، ع ↔ م.

الزوايا ← إذا كانت ك = ٧٣° وم = ٦١°، فإن س = ل.

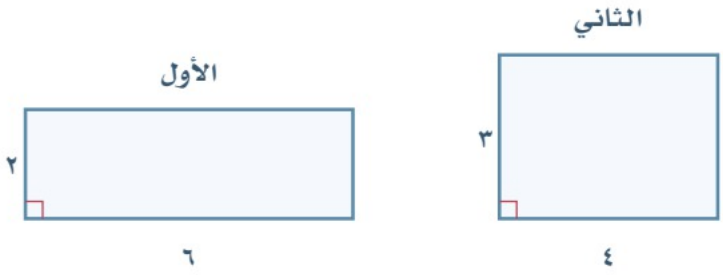
الحساب ← ١٨٠° − ٧٣° − ٦١° = ٤٦°

الأضلاع ← إذا كان ك م = ٧ ملم، فإن ص ع = ٧ ملم.

↓

هل المساحة المتساوية تكفي؟

مستطيل أبعاده ٢ × ٦، وآخر ٣ × ٤؛ مساحة كل منهما ١٢ وحدة مربعة، لكن أبعادهما مختلفة؛ فهما غير متطابقين.



أتدرب بنفسي

١ إذا كان △ أ ب ج ≅ △ هـ و ز، وطول أ ج = ١٢ سم، فأوجد هـ ز.

أتحقق من إجابتي

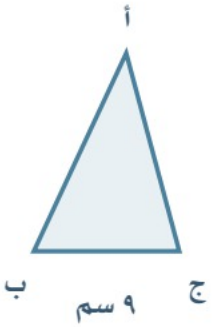
١) ١٢ سم؛ لأن أ ج يناظر هـ ز.

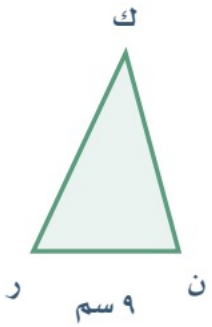
! المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كان عامل المقياس بينهما ١.

توسع: استقصاء تطابق المثلثات

ما المعلومات التي تكفي لتحديد مثلث؟

يمكن أحياناً إثبات تطابق مثلثين باستعمال ثلاثة قياسات مناسبة، بدل كتابة قياسات الأضلاع والزوايا الستة.





المعلومات المتناظرة	النتيجة
ثلاثة أضلاع متطابقة	المثلثان متطابقان.
ضلعان والزاوية المحصورة بينهما متطابقة	المثلثان متطابقان.
ثلاث زوايا متطابقة	المثلثان متشابهان؛ وقد يختلف حجمهما.

مثال

إذا كانت أضلاع مثلث ٤، ٦، ٩ سم، وأضلاع آخر ٤، ٦، ٩ سم، فهما متطابقان؛ لأن الأضلاع الثلاثة المتناظرة متطابقة.

أنتبه إلى موضع الزاوية

عند استعمال ضلعين وزاوية، يجب في هذه الحالة أن تكون الزاوية بين الضلعين المعطيين.

أتدرب بنفسي

١ مثلثان متشابهان، وعامل المقياس بينهما ١ . هل هما متطابقان؟

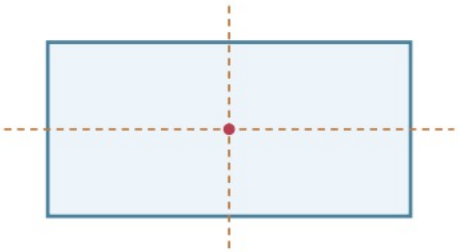
أتحقق من إجابتي

١) نعم؛ لأن الأطوال المتناظرة متساوية والزوايا المتناظرة متساوية.

٥ التماثل

محور التماثل: نصفان ينطبقان بالطي

للشكل تماثل حول محور إذا انطبق نصفاه عند طيه على هذا المستقيم. قد يكون للشكل محور واحد، أو أكثر، أو لا يوجد له محور.



المستطيل غير المربع له محوران: أفقي ورأسي يمران بالمركز. قطراه ليسا محوري تماثل له.

مضلع منتظم

للمضلع المنتظم عدد من محاور التماثل يساوي عدد أضلاعه.

الشكل	عدد المحاور
مثلث متطابق الأضلاع	٣
مربع	٤
خماسي منتظم	٥
سداسي منتظم	٦

أتدرب بنفسي

١ كم محور تماثل للمضلع السباعي المنتظم؟

٢ كم محور تماثل للمستطيل غير المربع؟

أتحقق من إجابتي

١) ٧ محاور.

٢) محوران: أفقي ورأسي.

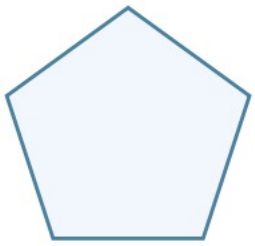
! أفحص الشكل كاملاً مع ألوانه أو زخارفه إن وجدت؛ فقد تمنع الألوان انطباق النصفين.

الهندسة والاستدلال المكاني

٥ التماثل

التماثل الدوراني: يعود الشكل إلى الوضع نفسه

للشكل تماثل دوراني حول نقطة إذا انطبق على نفسه بعد دوران بزاوية أكبر من °٠ وأقل من °٣٦٠ . أصغر زاوية للمضلع المنتظم = °٣٦٠ ÷ عدد أضلاعه.



مثال: خماسي منتظم

°٣٦٠ ÷ ٥ = °٧٢

زوايا التماثل الدوراني: °٧٢، °١٤٤، °٢١٦، °٢٨٨ .

الشكل	زوايا الدوران التي تطابقه على نفسه
مستطيل غير مربع	°١٨٠
مربع	°٩٠، °١٨٠، °٢٧٠
مثلث متطابق الأضلاع	°١٢٠، °٢٤٠

أقارن الاتجاهين

دوران °٩٠ عكس عقارب الساعة يعطي الوضع نفسه لدوران °٢٧٠ مع عقارب الساعة، إذا كان المركز نفسه.

أتدرب بنفسي

١ ما أصغر زاوية تماثل دوراني لمثمن منتظم؟

أتحقق من إجابتي

١) °٣٦٠ ÷ ٨ = °٤٥ .

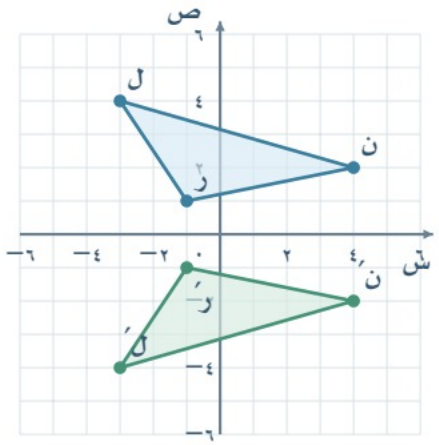
تنبيه: °٣٦٠ تعيد كل شكل إلى مكانه؛ لذلك لا نعدها وحدها دليلاً على وجود تماثل دوراني.

الهندسة والاستدلال المكاني

٦ الانعكاس

الانعكاس يقلب الشكل حول محور

الانعكاس يشبه صورة المرآة: كل نقطة وصورتها على مسافتين متساويتين من محور الانعكاس، والقطعة بينهما عمودية على المحور.



حول محور السينات: أبقي س وأغير إشارة ص

(س ، ص) تصبح (س ، −ص).

الرأس	الأصل	الصورة
ل	(−٣ ، ٤)	(−٣ ، −٤)
ن	(٤ ، ٢)	(٤ ، −٢)
ر	(−١ ، ١)	(−١ ، −١)

أتدرب بنفسي

١ أوجد صورة النقطة (٣ ، ٥) بالانعكاس حول محور السينات.

٢ أوجد صورة النقطة (−٢ ، −٤) حول محور السينات.

أتحقق من إجابتي

١) (٣ ، −٥)

٢) (−٢ ، ٤)

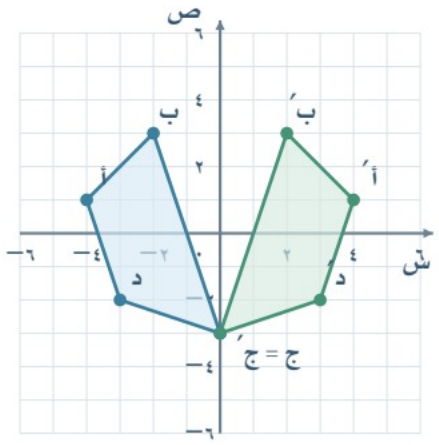
! في هذا الرسم: الأصل أزرق، والصورة خضراء. الانعكاس يحفظ الأطوال والزوايا، ويعكس ترتيب اتجاه الرؤوس.

الهندسة والاستدلال المكاني

٦ الانعكاس

حول محور الصادات: أغير إشارة س فقط

في الانعكاس حول محور الصادات تبقى ص كما هي، وتتغير إشارة س: (س ، ص) تصبح (−س ، ص).



الرأس	الأصل	الصورة
أ	(−١ ، ٤)	(١ ، ٤)
ب	(−٢ ، ٣)	(٢ ، ٣)
ج	(٠ ، −٣)	(٠ ، −٣)
د	(−٣ ، −٢)	(٣ ، −٢)

أتدرب بنفسي

١ أوجد صورة (٧ ، −٢) حول محور الصادات.

٢ نقطة (٠ ، ٥) على محور الصادات. ما صورتها حوله؟

أتحقق من إجابتي

١) (−٧ ، −٢)

٢) (٠ ، ٥)؛ تبقى في مكانها.

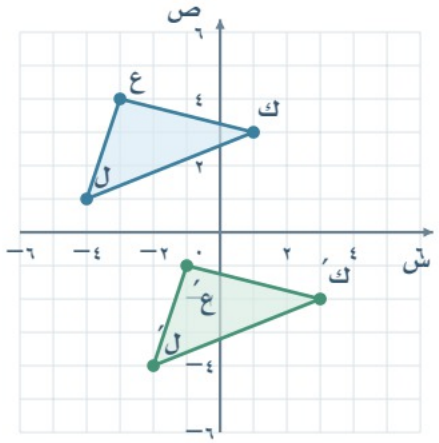
! النقطة التي تقع على محور الانعكاس لا تتغير. أميز اسم المحور قبل تغيير الإشارة.

الهندسة والاستدلال المكاني

٧ الانسحاب

الانسحاب يحرك كل رأس بالمقدار نفسه

الانسحاب ينقل الشكل أفقيًا ورأسيًا من غير تدوير أو قلب. أطبق الحركة نفسها على كل رأس، ثم أصل الرؤوس الجديدة بالترتيب.



مثال: وحدتان يمينًا و٥ وحدات إلى أسفل

أضيف ٢ إلى س، وأطرح ٥ من ص:

الرأس	الأصل	الصورة
ع	(٤، ٣−)	(١−، ١−)
ك	(٣، ١)	(٣، ٢−)
ل	(١، ٤−)	(٢−، ٤−)

أتدرب بنفسي

١ انقل النقطة (٣، ٤) أربع وحدات يمينًا ووحدتين إلى أسفل.

أتحقق من إجابتي

١) (٢، ٧)

تلميح: يمين: أضيف إلى س. يسار: أطرح من س. أعلى: أضيف إلى ص. أسفل: أطرح من ص.

٧ الانسحاب

أكتب قاعدة الانسحاب وأتحقق بعكس الحركة

قاعدة الانسحاب بمقدار أ أفقيًا وب رأسيًا: (س ، ص) تصبح (س + أ ، ص + ب). الموجب يعني يمينًا أو أعلى، والسالب يعني يسارًا أو أسفل.

مثال: ٤ وحدات يساراً و٣ وحدات إلى أعلى

صورة النقطة أ (٤ ، −٣) هي:

$$س' = ٤ - ٤ = ٠$$

$$ص' = -٣ + ٣ = ٠$$

إذن أ′ (٠ ، ٠).

كيف أجد الحركة من نقطة وصورتها؟

انتقلت أ من (٤ ، ٣) إلى (−١ ، ٣). تغيرت س بمقدار −٥، وبقيت ص؛ إذن الحركة ٥ وحدات يساراً.

أتدرب بنفسي

١ طبق الحركة نفسها على ب (−٧ ، ٠).

٢ انقل النقطة (−٢ ، ١) وحدتين يساراً و٣ وحدات إلى أسفل.

٣ إذا انسحب شكل ٥ وحدات يساراً و٧ أعلى، ثم ٥ يميناً و٧ أسفل، أين ينتهي؟

أتحقق من إجابتي

١) (−١٢ ، ٠)

٢) (−٤ ، −٢)

٣) في موضعه الأصلي؛ لأن الحركتين متعاكستان.

أستطيع عكس الانسحاب بإجراء الحركة المقابلة: اليمين يقابله اليسار، والأعلى يقابله الأسفل.

الهندسة والاستدلال المكاني

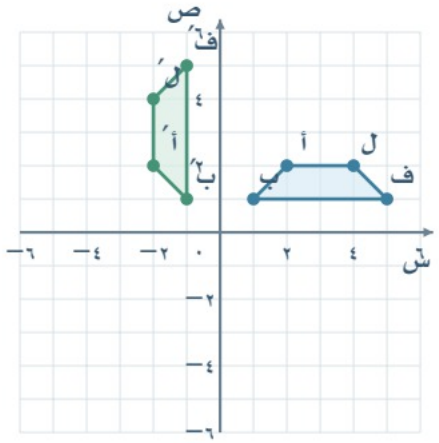
٨ الدوران

أحدد المركز والزاوية والاتجاه

الدوران يحرك الشكل حول نقطة ثابتة تسمى المركز، بزاوية واتجاه محددين. يحفظ المسافة بين المركز وكل نقطة. في هذا الملخص الدوران عكس عقارب الساعة ما لم يذكر غير ذلك.

دوران ٩٠° حول نقطة الأصل

تتحول (س ، ص) إلى (−ص ، س). أبدل موضعي الإحداثيين، ثم أغير إشارة الإحداثي الأول الجديد.



الرأس	الأصل	الصورة
أ	(٢ ، ٢)	(−٢ ، ٢)
ب	(١ ، ١)	(−١ ، ١)
ف	(٥ ، ١)	(−١ ، ٥)
ل	(٤ ، ٢)	(−٢ ، ٤)

أتدرب بنفسي

١ أوجد صورة (٣ ، ١) بدوران ٩٠° حول الأصل.

أتحقق من إجابتي

١) (−١ ، ٣)

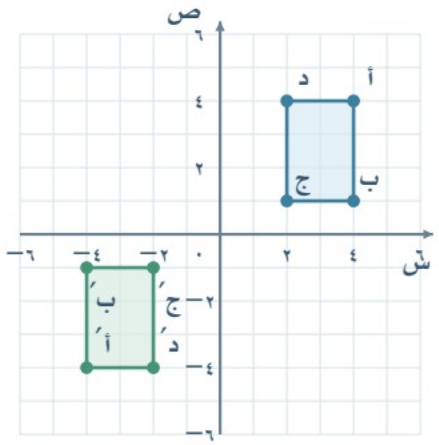
! الأزرق هو الأصل، والأخضر الصورة. قواعد هذه الصفحات للدوران حول نقطة الأصل تحديداً.

الهندسة والاستدلال المكاني

٨ الدوران

دوران ١٨٠° : أغير الإشارتين

حول نقطة الأصل: (س ، ص) تصبح (−س ، −ص). لا أبدل موضعي الإحداثيين. عند ١٨٠° يعطي الاتجاهان الصورة نفسها.



الرأس	الأصل	الصورة
أ	(٤ ، ٤)	(−٤ ، −٤)
ب	(٤ ، ١)	(−٤ ، −١)
ج	(٢ ، ١)	(−٢ ، −١)
د	(٢ ، ٤)	(−٢ ، −٤)

أتدرب بنفسي

١ أوجد صورة (−٣ ، ٥) بدوران ١٨٠° حول الأصل.

٢ أوجد صورة (٠ ، −٤) بالدوران نفسه.

أتحقق من إجابتي

١) (٣ ، −٥)

٢) (٤ ، ٠)

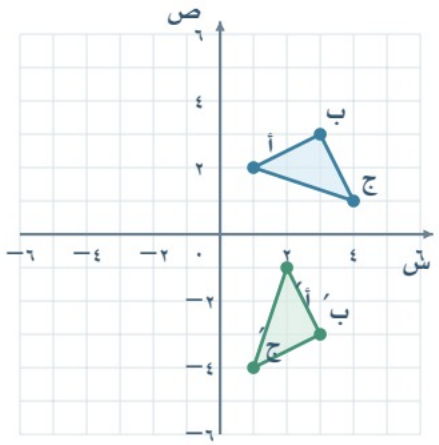
! الدوران يحفظ طول كل ضلع ومحيط الشكل وقياسات زواياه؛ فتكون الصورة مطابقة للأصل.

الهندسة والاستدلال المكاني

٨ الدوران

دوران ٢٧٠° : أميز الإشارة والاتجاه

دوران ٢٧٠° عكس عقارب الساعة حول الأصل: (س ، ص) تصبح (ص ، −س). وهو يكافئ دوران ٩٠° مع عقارب الساعة حول المركز نفسه.



الرأس	الأصل	الصورة
أ	(١ ، ٢)	(٢ ، −١)
ب	(٣ ، ٣)	(٣ ، −٣)
ج	(٤ ، ١)	(١ ، −٤)

أتدرب بنفسي

١ أوجد صورة (−٢ ، ٥) بدوران ٢٧٠° حول الأصل.

٢ دوران ٩٠° ثم ٢٧٠° بالاتجاه نفسه وحول المركز نفسه؛ ما الوضع النهائي؟

أتحقق من إجابتي

١) (٥ ، ٢)

٢) مجموعهما ٣٦٠° ؛ فيرجع الشكل إلى وضعه الأصلي.

! أكتب نوع الدوران واتجاهه ومركزه قبل تطبيق القاعدة؛ ثم أفحص موقع الصورة على الرسم.

مراجعة الفصل الخامس

الزوايا والمضلعات والتطابق والتماثل

أختار القاعدة

المطلوب	القاعدة أو الفكرة
الزاوية المجهولة	تساوٍ، أو مجموع ٩٠°، أو ١٨٠° حسب العلاقة.
مجموع زوايا مضلع	(ن − ٢) × ١٨٠°.
زاوية مضلع منتظم	المجموع ÷ ن.
التطابق	الشكل والقياس نفسيهما، مع تحديد التناظر.
أصغر دوران لمضلع منتظم	٣٦٠° ÷ ن.

أختبر فهمي

١ زاويتان متكاملتان؛ الأولى ١١٩°. أوجد الأخرى.

٢ أوجد مجموع زوايا مثمن، وقياس كل زاوية إذا كان منتظمًا.

٣ ما قياس كل زاوية في مضلع منتظم له ١٥ ضلعًا؟

٤ ما أصغر زاوية تماثل دوراني لخماسي منتظم؟

أتحقق من إجابتي

١) ٦١°.

٢) المجموع ١٠٨٠°، وكل زاوية ١٣٥°.

٣) ٢٣٤٠° ÷ ١٥ = ١٥٦°.

٤) ٧٢°.

! أفرق بين مجموع الزوايا وقياس زاوية واحدة، وبين التطابق والتشابه.

مراجعة الفصل الخامس

أقارن التحويلات وأطبق القاعدة الصحيحة

التحويل	ما الذي أفعله؟
انعكاس حول السينات	أغير إشارة ص فقط.
انعكاس حول الصادات	أغير إشارة س فقط.
انسحاب	أضيف الحركة الأفقية إلى س، والرأسية إلى ص.
دوران حول الأصل	أستعمل قاعدة الزاوية المطلوبة واتجاهها.

أراجع وأطبق

١ أوجد صورة (٢ ، ٣) حول محور السينات.

٢ أوجد صورة (−١ ، ٤) حول محور الصادات.

٣ انقل (١ ، −٢) أربع وحدات يساراً وخمسًا إلى أعلى.

٤ أدر (٣ ، ٣) بزاوية ٩٠° حول الأصل عكس عقارب الساعة.

٥ أدر (−١ ، −٥) بزاوية ١٨٠° حول الأصل.

٦ أدر (٣ ، ٢) بزاوية ٢٧٠° حول الأصل عكس عقارب الساعة.

أتحقق من إجابتي

١) (٢ ، −٣)

٢) (١ ، ٤)

٣) (−٣ ، ٣)

٤) (−٣ ، ٣)

٥) (١ ، ٥)

٦) (٢ ، −٣)

! الانعكاس والانسحاب والدوران تحفظ أطوال الأضلاع والزوايا؛ لذلك الصورة فيها تطابق الشكل الأصلي.

الهندسة والاستدلال المكاني

مراجعة شاملة

أحل أولاً، ثم أراجع خطواتي

تدريب يجمع أفكار الفصول الأربعة الأولى. أكتب العملية وأوضح السبب، ثم أقارن بإجابة التحقق.

أختبر نفسي

١ احسب $-\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٤}$.

٢ احسب $\frac{٥}{٦} \div \frac{١}{٣}$.

٣ اكتب ٠,٠٠٠٠٧٣ بالصورة العلمية.

٤ في مثلث قائم ضلعان قائمان ٦، ٨ سم. أوجد الوتر.

٥ ثلاثة أساور تحتاج ٥٥ دقيقة. كم ساعة تحتاج ١٨ سواراً بالمعدل نفسه؟

٦ وفر عمار ٤٩,٧٥ ريالاً؛ والخصم ٢٥٪ من السعر الأصلي. أوجد الأصل.

أتحقق من إجابتي

١) $-\frac{١}{٢}$؛ أبسط قبل الضرب وأحدد الإشارة.

٢) ٢ ونصف؛ أضرب في مقلوب الثلث.

٣) ٧.٣×١٠^{-٥}؛ لأن الفاصلة تحركت ٥ منازل.

٤) ١٠ سم؛ لأن ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠، وجذر ١٠٠ = ١٠.

٥) ٣٣٠ دقيقة = ٥,٥ ساعات.

٦) ٤٩,٧٥ ÷ ٠,٢٥ = ١٩٩ ريالاً.

أراجع: الإشارة، المقلوب في القسمة، أس القوة، الوتر، الوحدة، ثم أصل حساب النسبة.

الهندسة والاستدلال المكاني

مراجعة شاملة

أثبت الفكرة وأراجع التحويلات

أطبق ما تعلمت

١ زاويتان متتامتان؛ إحداهما ٢٨° . أوجد الأخرى.

٢ أوجد مجموع الزوايا الداخلية لمضلع له ١٢ ضلعاً.

٣ أوجد قياس كل زاوية في خماسي منتظم.

٤ أوجد صورة (−٣ ، ٢) بالانعكاس حول محور السينات.

٥ انقل (٢ ، −١) ثلاث وحدات يساراً وأربع وحدات إلى أعلى.

٦ أدر (٤ ، −٢) بزاوية ٩٠° عكس عقارب الساعة حول الأصل.

أتحقق من إجابتي

١) ٦٢°.

٢) ١٨٠٠°.

٣) ١٠٨°.

٤) (−٣ ، −٢)

٥) (−١ ، ٣)

٦) (٢ ، ٤)

مراجعة أخيرة قبل تسليم الحل

أفحص	ما أسأل نفسي؟
القاعدة	هل تناسب المطلوب؟ وهل تحققت شروطها؟
الحساب	هل كتبت الإشارات والفاصلة والمقام بدقة؟
الجواب	هل كتبت الوحدة؟ وهل الناتج معقول؟

إذا أخطأت، أحدد الخطوة التي تحتاج مراجعة، ثم أعيد حل سؤال شبيه حتى تثبت الفكرة.